LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

PHYSIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDE DES SELS FONDUS PAR DIFFRACTION DES RAYONS X AUX TEMPÉRATURES ÉLEVÉES

I. STRUCTURE A L'ÉTAT LIQUIDE DES FLUORURES LiF, NaF et KF.

Par JERZY ZARZYCKI,
Centre de Recherches des Glaceries de Saint-Gobain, France.

I. **Introduction.** — Nos récentes recherches sur la structure comparée à l'état solide et à l'état liquide de quelques formateurs de réseau vitreux [1], [2] nous ont permis d'entrevoir le degré de complexité des phénomènes associés au processus de fusion de ces corps. Afin de mieux comprendre le mécanisme de la fusion, il nous a paru nécessaire d'entreprendre d'abord une étude systématique de la structure à l'état liquide des sels fondant aux températures élevées. Initialement, notre choix s'est porté sur la série de *fluorures* dont la structure à l'*état fondu* n'a encore jamais été étudiée. L'intérêt de cette étude est double si l'on se souvient des relations d'isostructure (GOLDSCHMIDT) [3] qui existent entre certains fluorures et oxydes. Ainsi par exemple les fluorures LiF, NaF et KF étudiés dans ce travail peuvent être considérés comme des « modèles » isostructuraux respectifs des oxydes MgO, CaO et BaO.

L'étude des fluorures *fondus* nous donnera donc en même temps une idée de la structure que présenteraient à l'*état liquide* les oxydes isostructuraux correspondants, structure dont la détermination directe par diffraction X paraît difficilement abordable étant donné le caractère éminemment réfractaire de cette série de corps.

II. **Méthode expérimentale.** — Le dispositif expérimental utilisé a été déjà décrit ailleurs [4], [5] avec tous les détails désirables. Nous rappellerons seulement ici qu'il s'agit d'une chambre de diffraction spéciale, de type *à focalisation* associée à un monochromateur Guinier à quartz courbe. Toutes les poses sont faites en rayonnement *strictement monochromatique*, la chambre travaillant en *transmission*, sous incidence normale. L'échantillon est constitué par une mince pellicule du corps à étudier maintenue par les forces de capillarité dans une fente pratiquée dans un résistor en alliage Pt-Rh à 20 % de Rh alimenté en courant basse tension. (Le four ainsi constitué permet de travailler à des températures pouvant aller jusqu'à 1 600 °C.) L'épaisseur des échantillons était de 0,3 à 0,5 mm suivant le cas. (Des dispositifs annexes rendent possibles la correction d'absorption dans l'échantillon et la correction de diffusion due à l'air). Une feuille d'aluminium de 0,02 mm d'épaisseur placée devant le film servait d'écran destiné à arrêter le rayonnement de fluorescence excité dans l'échantillon. De plus, dans le cas de certains fluorures plus volatils on a dû adopter un contrôle permanent de l'état de l'échantillon en place dans la chambre, à l'aide d'un compteur Geiger fonctionnant en jauge d'épaisseur.

La radiation utilisée était Mo$K\alpha$ (45 kV, 6 mA), les temps de pose variant de 6 à 12 heures.

On a étudié à l'état fondu les fluorures suivants : LiF à 860 °C, NaF à 1 000 °C et KF à 870 °C.

III. **Résultats expérimentaux.** — Les clichés ont été dépouillés au microphotomètre enregistreur Vassy et les courbes obtenues après conversion habituelle des densités optiques en intensités de rayonnement à l'aide des marques d'intensité ont subi les corrections d'absorption dans l'échantillon, de diffusion due à l'air, de polarisation par le monochromateur et l'échantillon, de forme de la chambre et de retrait du film.

Les figures 1 à 3 montrent les spectres de diffraction des fluorures LiF, NaF et KF fondus, obtenus de cette manière. L'intensité des spectres a été exprimée en unités électroniques, la normalisation à la courbe d'intensité de diffusion totale indépendante étant faite dans chaque cas sur la base d'une unité stoechiométrique ionisée.

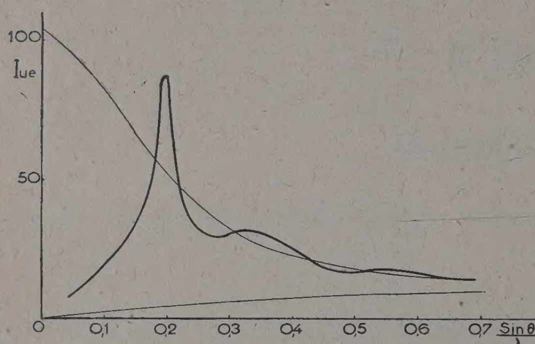


Fig. 1. — Spectre de diffraction de LiF fondu à 860 °C.

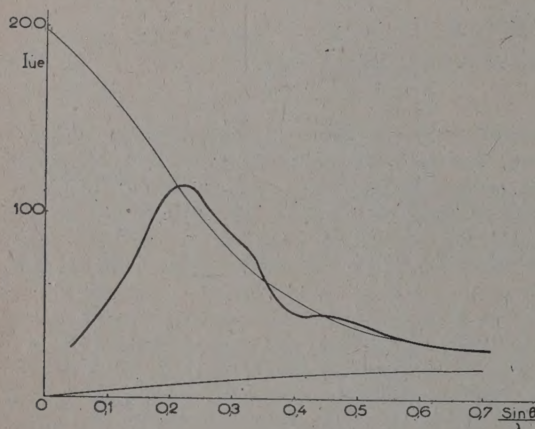


Fig. 2. — Spectre de diffraction de NaF fondu à 1 000 °C.

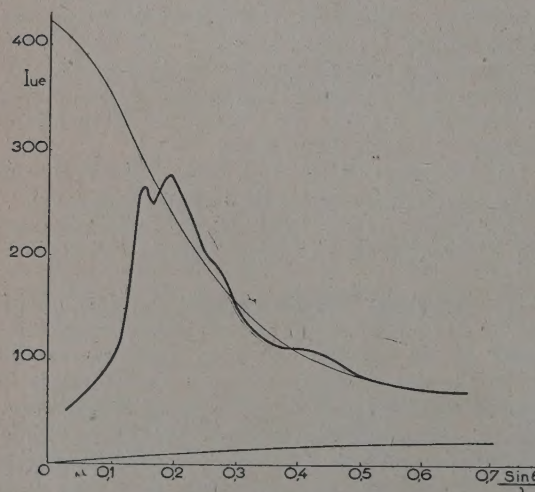


Fig. 3. — Spectre de diffraction de KF fondu à 870 °C.

On remarquera le caractère plus accusé des spectres de LiF et KF contrastant avec l'aspect particulièrement étalé et diffus du spectre de NaF. Ceci est sans doute dû à ce que l'écart entre les facteurs de structure des ions constitutifs est minimininimum dans le cas de NaF.

IV. **Analyse des spectres.** — Les spectres précédents ont été soumis à l'analyse radiale de Fourier généralisée aux système hétéroatomiques (Warren, Krutter, Morningstar) [6]. On sait que la densité radiale est donnée par la relation :

$$\sum_m K_m \, 4\pi r^2 \, \rho_m(r) = \sum_m K_m \, 4\pi r^2 \, \rho_0 + \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty Si(S) \sin rS \, dS$$

où l'on désigne par :

r une distance interatomique ;

$\sum_m$ la sommation étendue à l'unité stoechiométrique ;

K_m le nombre électronique effectif de l'atome m défini par le rapport :

$$K_m = f_m / f_e$$

f_m étant le facteur de structure de l'atome m et f_e le facteur de structure moyen d'un électron, luimême défini par :

$$f_e = \sum_m f_m / \sum_m Z_m$$

pour l'unité stoechiométrique comportant n atomes de nombres atomiques respectifs

$$Z_1, \ldots Z_m, \ldots Z_n.$$

De plus :

$$S = 4\pi \sin \theta / \lambda$$

$$i(S) = \left(I_{\text{coh}} - \sum_m f_m^2\right) / f_e^2$$

ρ_0 la densité électronique moyenne par Å ^{3} :

$$\rho_0 = 10^{-24} \, Nd \sum_m Z_m / M$$

où : N est le nombre d'Avogadro, d la densité macroscopique du sel fondu, M la masse de l'unité stoechiométrique.

Les nombres atomiques effectifs K_m étant des fonctions de S dans l'intervalle fini d'intégration $(0, S_0)$, on utilisera les nombres moyens :

$$\overline{K}_m = \frac{1}{S_0} \int_0^{S_0} K_m \, dS.$$

Le calcul de l'intégrale :

$$\frac{2r}{\pi} \int_0^{S_0} Si(S) \sin rS \, dS$$

a été effectué au moyen d'un analyseur harmonique Mader-Ott.

Le tableau I rassemble les données numériques introduites dans l'analyse de Fourier de chaque cas particulier : les nombres électroniques effectifs moyens $\overline{K}_{X^+}$ et $\overline{K}_{F^-}$ du cation et de l'anion ainsi que la densité d_t du sel fondu à la température t de l'expérience.

Cette densité a été calculée d'après les données de Jaeger [7].

TABLEAU I

	$\overline{K}_{X^+}$	$\overline{K}_{F^-}$	$d_{t°C}$
LiF	2,8	9,2	$d_{860} = 1{,}79$
NaF	11,3	8,6	$d_{1000} = 1{,}94$
KF	20,0	8,0	$d_{870} = 1{,}89$

Les figures 4 à 6 montrent les courbes de distribution radiale des fluorures fondus correspondant aux spectres représentés sur les figures 1 à 3.

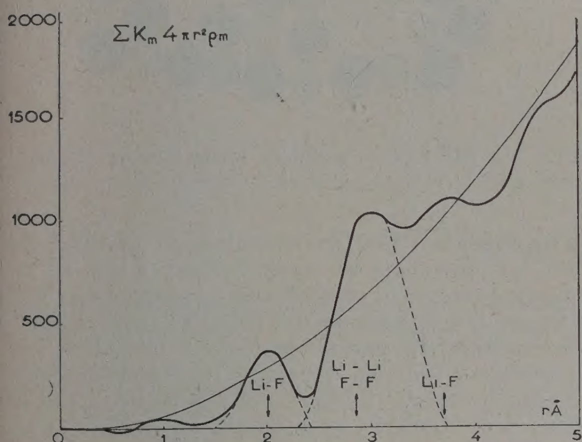


Fig. 4. — Courbe de distribution radiale de LiF fondu à 860 °C.

V. **Interprétation structurale**. — Sur les figures 4 à 6 nous avons repéré, par des flèches les premières distances interatomiques des fluorures *cristallisés* correspondants. On constate que ces distances se placent très sensiblement à l'aplomb des maxima successifs des courbes de distribution radiale relatives à l'état fondu. Ainsi, par exemple, dans le cas de LiF (*fig.* 4) où l'on compte jusqu'à 3 maxima bien résolus, ces maxima correspondent très sensiblement aux 3 premières distances interatomiques Li-F, Li-Li (ou F-F) et $(\text{Li-F})_{II}$ du cristal, le faible écart pouvant être attribué à la dilatation thermique du réseau avant le point de fusion. De même les courbes de distribution radiale relatives à NaF et KF (*fig.* 5 et 6) présentent respectivement 3 et 2 maxima résolus et bien en rapport avec les premières distances interatomiques du solide cristallin correspondant.

On voit donc que toutes les fois qu'un maximum est bien résolu il se trouve être très voisin d'une distance interatomique à l'état solide et que, inversement, il n'apparaît pas sur les courbes de distribution radiale de maxima supplémentaires venant s'intercaler entre les premières distances interatomiques à l'état cristallin.

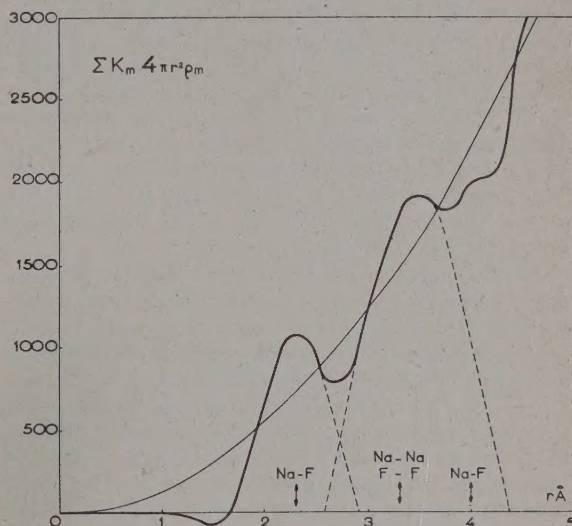


Fig. 5. — Courbe de distribution radiale de NaF fondu à 1 000 °C.

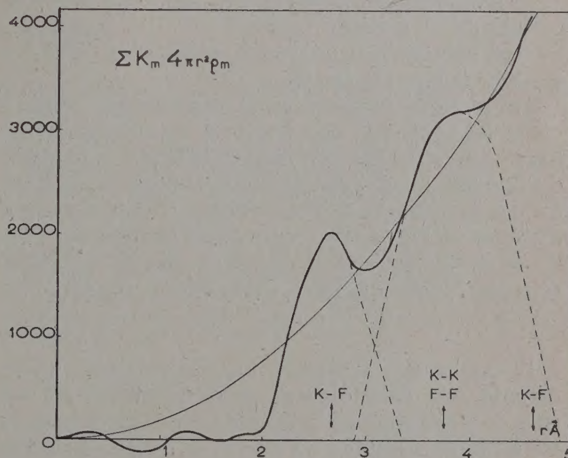


Fig. 6. — Courbe de distribution radiale de KF fondu à 870 °C.

Ceci indique que le *schéma de coordination du cristal persiste à l'état fondu* du moins en ce qui concerne les premières distances interatomiques (ordre à courte distance).

Dès lors comment devons-nous représenter le modèle du « réseau » liquide ? Et en particulier

comment concilier la conservation apparente à l'état fondu des premières distances interatomiques du cristal avec *le fort accroissement de volume* observé lors de la fusion de ces sels ? L'étude des nombres de coordination déduits des courbes de distribution radiale fournit la solution du problème.

Dans le tableau II, nous avons établi la comparaison entre les nombres de coordination à l'état fondu et à l'état cristallin, associés aux premières distances interatomiques étudiées précédemment. n_B^A désigne ici le nombre d'atomes B situés autour d'un atome central A à une distance (A — B). En phase liquide n_B^A et (A — B) n'ont évidemment qu'une valeur statistique moyenne.

D'une manière générale on constate que *les nombres de coordination à l'état fondu sont systématiquement très inférieurs aux nombres de coordination classiques à l'état cristallin.* Cette décroissance augmente d'ailleurs progressivement dans le sens KF → NaF → LiF. Dans le cas de fluorure de sodium fondu par exemple un ion n'aurait plus en moyenne que 4 voisins immédiats contre 6 dans le cristal. Ceci est capital pour la compréhension de la structure de ces sels à l'état liquide. En effet les deux constatations jointes :

1. Conservation à l'état fondu de la suite des premières distances interatomiques du cristal.

2. Diminution importante des nombres de coordination à l'état fondu,

ne sont compatibles qu'avec l'existence de « trous » dans le milieu sel fondu.

Toute autre interprétation pour rendre compte de la décroissance des nombres de coordination, basée par exemple sur une modification générale du schéma de coordination, ne saurait s'accorder avec la persistance à l'état fondu de l'ordre à courte distance du cristal, cet ordre étant caractérisé dans le cas de fluorures alcalins par la *série* de distances interatomiques qui sont entre elles comme

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}.$$

Il faut donc admettre nécessairement que la décroissance des nombres de coordination est un effet de moyenne dû à la formation des lacunes dans un « réseau » liquide où l'ordre à courte distance est de même type que celui rencontré à l'état solide.

Les fluorures fondus étudiés présentent donc une structure essentiellement lacunaire. Nous avons indiqué sur la figure 7 un schéma bidimensionnel possible

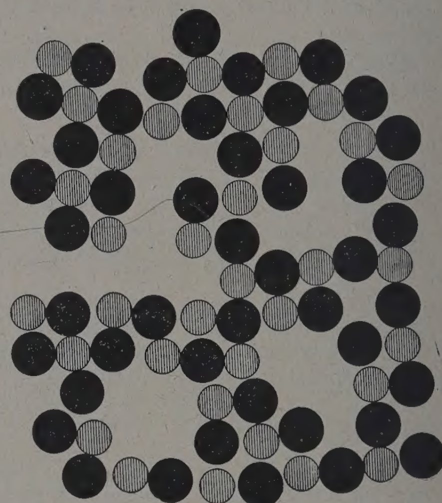


FIG. 7. — Structure « lacunaire » des fluorures fondus.

d'une telle structure. On voit maintenant la raison du fort accroissement de volume observé lors de la fusion de ces sels : ce gonflement correspond précisément à la formation des lacunes. Pour chiffrer avec précision la part qui revient à la formation des « trous » il faudrait connaître la dilatation thermique du réseau du cristal avant la fusion. Dans le cas des fluorures, ces données n'existent que pour LiF.

Les mesures dilatométriques [8] corrigées par les mesures du paramètre du réseau [9], [10] permettent de déduire la densité d_{PF} du cristal LiF au voisinage immédiat de son point de fusion. Le calcul donne :

$$d_{PF} = 2,27$$

la densité d_F à l'état fondu est d'autre part (JAEGER) [7] :

$$d_F = 1,79.$$

TABLEAU II

	LiF		NaF		KF	
	fondu	cristal	fondu	cristal	fondu	cristal
$n_F^X (= n_X^F)$	*3,7*	6	*4,1*	6	*4,9*	6
$n_X^X (= n_F^F)$	8	12	9	12	9	12
$n_F^X (= n_X^F)$		8		8		8

La proportion (en volume) des lacunes dans le sel fondu est alors donnée par l'expression :

$$\frac{V_F - V_{PF}}{V_F} = \frac{d_{PF} - d_F}{d_{PF}} \quad (= 0{,}21 \text{ pour LiF}).$$

Les lacunes représentent donc 21 % du volume total du LiF fondu à 860 °C.

Conclusion. — Ce travail renferme, nous semble-t-il, la première preuve expérimentale directe de l'existence de « trous » dans le milieu sel fondu. En établissant la structure essentiellement lacunaire des fluorures liquides nous avons pu trouver en même temps l'explication (dès lors évidente) de la forte expansion observée lors de la fusion de ces sels. Nous aurons l'occasion très prochainement de présenter les résultats relatifs à d'autres milieux fondant aux températures élevées et de préciser davantage la structure « lacunaire » décrite sommairement dans la présente publication.

Manuscrit reçu le 29 janvier 1957.

RÉFÉRENCES

[1] ZARZYCKI (J.), 1956, Étude du réseau vitreux par diffraction des rayons X aux températures élevées. Travaux du IVe Congrès International du Verre, Paris, 2-7 juillet 1956 [VI-4] 323.
[2] ZARZYCKI (J.), Verres et Réfractaires, 1957, **11**, janvier-février 3.
[3] GOLDSCHMIDT, *Skr. Norske Vidensk. Akad.*, 1926, (8).
[4] ZARZYCKI (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1955, **241**, 480.
[5] ZARZYCKI (J.), *J. Physique Rad.*, (Suppl. Phys. Appl.), 1956, **17**, 44 A.
[6] WARREN (B. E.), KRUTTER (H.) et MORNINGSTAR (O.), *J. Amer. Cer. Soc.*, 1936, **19**, 202.
[7] JAEGER, *Z. anorg. Chem.*, 1917, **101**, 1.
[8] EUCKEN (A.) et DANNÖHL (W.), *Z. Elektrochem.*, 1934, **40**, 814.
[9] GOTT (A.), *Ann. Physik*, 1942, **41**, 520.
[10] THOMPSON (J. H. C.), *Phil. Mag.*, 1953, **44**, 131.

REVUE DES LIVRES

PIRAUX (H.), **Dictionnaire français-anglais des termes relatifs à l'électrotechnique, l'électronique et les applications** (1 vol. 16 × 24 cm, 168 pages, Eyrolles, Paris, 1956, 960 F,

Ce dictionnaire complète heureusement le dictionnaire anglais-français déjà publié par le même auteur. Très complet — il contient plus de 9 000 mots ou expressions — et bien à jour, il rendra les plus grands services.

J. L.

UVAROV (E. B.) et CHAPMANN (D. R.), **Dictionnaire des sciences**, (1 vol. 15 × 24 cm, 325 pages. Presses Universitaires de France, Paris, 1956, 1 600 F.

Cette traduction, par H. J. d'Hermies, du dictionnaire paru en anglais, dans la collection Penguin Books, en 1952, a été si soigneusement et abondamment adaptée, complétée et remise à jour par Mme M. E. Cohen et M. R. Taton qu'il s'agit, pour une bonne part, d'un ouvrage original. Il donne la définition, souvent par une note explicative assez étendue, de près de 5 000 termes se rapportant aux mathématiques, à l'astronomie, à la physique et à la chimie. A vrai dire, la physique y est peut-être un peu écrasée entre les sciences mathématiques et la chimie (voir, par exemple, au mot équilibre). Il n'en reste pas moins que ce dictionnaire peut être très utile pour tous, d'autant plus que le terme anglais accompagne chaque mot français, et qu'un lexique anglais-français termine le volume.

J. L.

L'INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE DE L'ENCEINTE SUR LA SENSIBILITÉ DU MANOMÈTRE THERMIQUE

Par M. VARICAK,
Institut de Physique de la Faculté des Sciences et Institut Rudjer-Boskovic, Zagreb, Yougoslavie.

Introduction. — Plusieurs auteurs [1] ont déjà signalé la possibilité d'augmenter la sensibilité des manomètres thermiques en abaissant la température de l'enceinte. Ainsi on sait que la sensibilité du manomètre thermique croît notablement si la tête du manomètre est plongée dans l'air liquide. Or, de ce fait, la vitesse de réponse du manomètre change. Les auteurs ne sont pas d'accord sur l'importance de ce changement. Campbell trouve que les indications du manomètre, plongé dans l'air liquide, suivent rapidement les changements de pression, tandis que Ellet et Zabel affirment qu'il faut attendre plusieurs minutes pour pouvoir faire une lecture.

Nous avons cru intéressant d'élucider cette question, en étudiant la réponse des manomètres thermiques à différentes températures de l'enceinte. L'étude a été faite à l'aide d'un oscillographe cathodique [2]. Cette manière d'opérer permet d'obtenir des résultats quantitatifs concernant la sensibilité et l'inertie du manomètre. Les expériences ont été faites sur un manomètre utilisant, au lieu des filaments des métaux, des thermistances [3].

Définition de la sensibilité et de l'inertie de la thermistance. — Au cours de nos recherches, sur l'utilisation des thermistances pour la mesure des basses pressions [2], nous avons trouvé nécessaire d'introduire des définitions pour la sensibilité et l'inertie des thermistances aux variations de la pression du gaz. Ces définitions sont les suivantes :

La sensibilité σ de la thermistance est le changement de la chute de tension sur la thermistance, pour un courant d'alimentation I et une variation de pression Δp ou, sous une forme symbolique

$$\sigma = [\Delta V]^{I(\text{mA})}_{\Delta p(\text{mm Hg})} \quad \text{volts.} \tag{1}$$

L'inertie τ de la thermistance est le temps t nécessaire pour que la thermistance atteigne 90 % de son changement final de résistance, pour un courant d'alimentation I et une variation de pression Δp.

Donc

$$\tau = [t]^{I(\text{mA})}_{\Delta p(\text{mm Hg}} \quad \text{secondes.} \tag{2}$$

Sur la possibilité d'augmenter la sensibilité de la thermistance. — Considérons une thermistance, parcourue par un courant I, placée dans une enceinte reliée à une pompe à vide. La température de régime de la thermistance est atteinte lorsque la puissance électrique fournie par effet Joule est égale à la puissance thermique dissipée. La dissipation de cette énergie se fait par conduction thermique à travers le gaz et les conducteurs qui amènent le courant à la thermistance, et par rayonnement. En négligeant les pertes d'énergie thermique par les conducteurs, on obtient donc d'après les lois de Knudsen [4] et de Stefan

$$R(T)\, I^2 = \beta\, pS(T_2 - T_1)\, T^{-1/2} + \sigma\, S(\varepsilon_2 T_2^4 - T_1^4) \tag{3}$$

avec : R, résistance de la thermistance ; S, surface de la thermistance ; β, une constante qui dépend de la nature du gaz ; T_1, température absolue de la paroi du récipient dans laquelle se trouve la thermistance ; T_2, température absolue de la thermistance ; σ, constante de rayonnement du corps noir ; ε_2, facteur d'émission de la thermistance.

Pour augmenter la sensibilité de la thermistance, aux variations de la pression du gaz, il faut évidemment augmenter la conductibilité thermique à travers le gaz

$$Q_1 = \beta\, pS(T_2 - T_1)\, T_1^{-1/2}. \tag{4}$$

Nous voyons que la sensibilité augmente avec la surface S de la thermistance et avec l'abaissement de la température T_1 de la paroi. Dans cette étude nous nous occuperons tout particulièrement de l'effet de la température de la paroi.

Il s'ensuit de la formule [3] que l'abaissement de la température T_1 a pour conséquence non seulement l'augmentation de Q_1, mais l'augmentation des pertes par rayonnement

$$Q_2 = \sigma\, S(\varepsilon_2 T_2^4 - T_1^4). \tag{5}$$

Or, ce qui importe est le quotient

$$q = Q_1 / Q_2. \tag{6}$$

En désignant par q_1 le quotient (6) pour la température T_1 et avec q_2 le même quotient pour la température $T_1' < T_1$ et en supposant $\varepsilon_2 = 1$ on obtient

$$q_2/q_1 = \frac{(T_2 + T_1)\,(T_2^2 + T_1^2)\, T_1^{1/2}}{(T_2 + T_1')\,(T_2^2 + T_1'^2)\, T_1'^{1/2}} \tag{7}$$

Il est facile à voir que pour $T'_1 < T_1$ le quotient q_2/q_1 est plus grand que l'unité. Donc en abaissant la température de la paroi, la perte d'énergie par conductibilité thermique du gaz augmente plus que la perte d'énergie par rayonnement.

Procédé expérimental. — Pour confirmer expérimentalement ces conclusions théoriques on s'est servi d'une méthode qui consiste à enregistrer, à l'aide d'un oscillographe cathodique, les diagrammes *V-I* et les diagrammes σ-τ des échantillons examinés. Les relations tension-intensité ou les diagrammes *V-I* montrent la dépendance de la tension, aux bornes de la thermistance, de l'intensité *I* du courant qui la traverse. On peut, de ces courbes, déduire pour chaque valeur du courant la résistance de la thermistance. La relation entre la résistance et la température des semi-conducteurs

$$R = a\, e^{b/T} \tag{8}$$

permet de trouver la température correspondant à chaque résistance. Les σ-τ diagrammes donnent le changement de la chute de tension sur la thermistance, pour une variation de pression d'air Δp et un courant *I*, en fonction du temps. Ce sont ces courbes qui ont donné la valeur numérique de la sensibilité et de l'inertie de la thermistance.

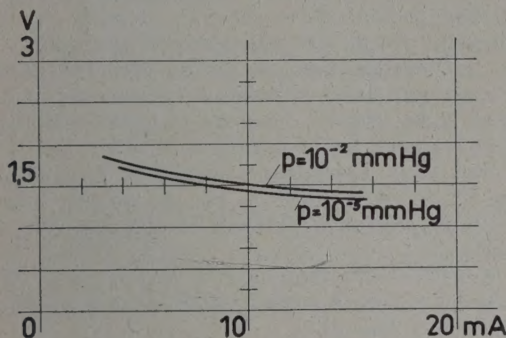


Fig. 1. — V-I diagramme de l'échantillon N_1, $T_1 = 293$ °K.

Les expériences ont été effectuées avec différents types des thermistances perles de Fe_2O_3, dont la résistance à 20 °C était entre 3 000 Ω et 140 000 Ω. Dans cette étude nous allons décrire les résultats obtenus pour la thermistance avec $R_{20^0} = 3\,000$ Ω et nous l'appellerons échantillon N_1.

Pendant les expériences, les échantillons étaient placés dans un tube de Pyrex, relié à une pompe à vide et construit de manière à pouvoir être immergé dans un bain de neige carbonique ($T_1 \sim 200$ °K) ou d'air liquide ($T_1 \sim 90$ °K).

Les figures 1, 2 et 3 montrent un domaine des fonctions $V = f(I)$ de l'échantillon N_1 pour les pressions d'air $p = 10^{-2}$ mmHg et $p = 10^{-3}$ mmHg. Ces courbes sont enregistrées de manière que le

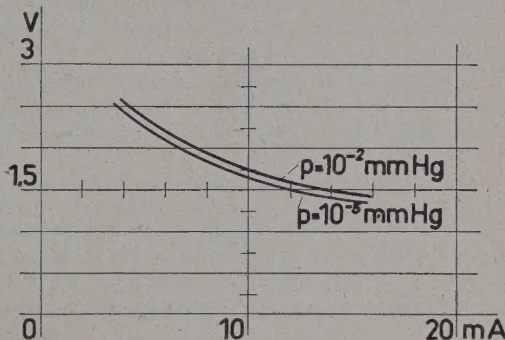


Fig. 2. — V-I diagramme de l'échantillon N_1, $T_1 = 200$ °K.

changement de l'intensité du courant $\Delta I = 2$ mA soit atteint en 60 secondes. La température de la paroi était $T_1 = 293$ °K (*fig.* 1), $T_1 = 200$ °K (*fig.* 2) et $T_1 = 90$ °K (*fig.* 3).

Ces courbes montrent que la sensibilité des thermistances augmente à mesure que la température de la paroi s'abaisse. D'après l'expression (1) la

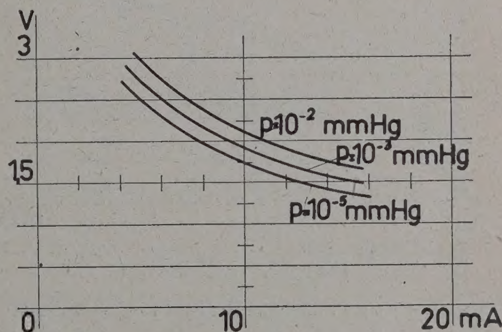


Fig. 3. — V-I diagramme de l'échantillon N_1, $T_1 = 90$ °K.

sensibilité σ pour $I = 10$ mA, et $\Delta p = 10^{-2}$ mmHg — 10^{-3} mmHg peut être présentée, pour les différentes températures, de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 293\ ^\circ\mathrm{K} : \sigma = [0{,}06]^{10}_{10^{-2}-10^{-3}} \ \text{volts} \\
T_1 &= 200\ ^\circ\mathrm{K} : \sigma = [0{,}10]^{10}_{10^{-2}-10^{-3}} \ \text{volts} \\
T_1 &= 90\ ^\circ\mathrm{K} : \sigma = [0{,}20]^{10}_{10^{-2}-10^{-3}} \ \text{volts.}
\end{aligned} \tag{9}
$$

A la température $T_1 = 90$ °K il est même pos-

sible de déterminer la sensibilité pour une différence de 10^{-3} mmHg à 10^{-5} mmHg :

$$\sigma = [0{,}18]^{10}_{10^{-3}-10^{-5}} \text{ volts.} \quad (10)$$

Lorsqu'on opère à des températures plus élevées, la sensibilité, pour la même variation, de pression est trop petite pour être mesurée.

L'influence de la température de la paroi sur la sensibilité de la thermistance peut être trouvée aussi en déterminant le quotient (6). La fonction (8) pour N_1 étant

$$R = 0{,}5 \, e^{2540/T} \quad (11)$$

on trouve la température T_2 de la thermistance pour les différentes températures T_1 à l'aide des fonctions $V = f(I)$, données sur les figures 1, 2 et 3. Les résultats pour $p = 10^{-3}$ mmHg et $I = 10$ mA sont :

$$\begin{aligned} T_1 &= 293 \text{ °K} : Q_1/Q_2 = 0{,}01 \\ T_1 &= 200 \text{ °K} : Q_1/Q_2 = 0{,}03 \\ T_1 &= 90 \text{ °K} : Q_1/Q_2 = 0{,}1. \end{aligned} \quad (12)$$

Afin d'étudier la vitesse avec laquelle la thermistance répond aux variations de pression dans des différentes conditions, nous avons mesuré les diagrammes σ-τ. La figure 4 donne ces diagrammes

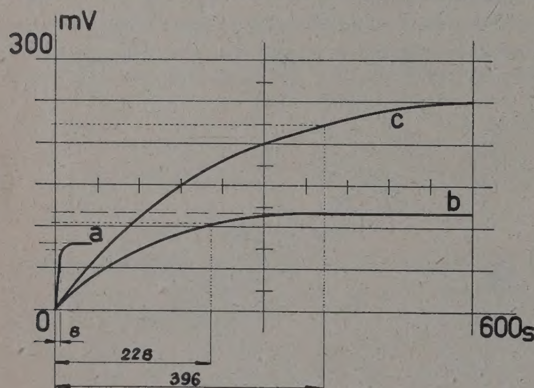


FIG. 4. — σ — τ diagrammes de l'échantillon N_1, $I = 10$ mA, $\Delta p = 10^{-2}$ mm Hg — 10^{-3} mm Hg. *a*) $T_1 = 293$ °K, *b*) $T_1 = 200$ °K, *c*) $T_1 = 90$ °K.

pour l'échantillon N_1 parcouru par le courant $I = 10$ mA, lorsque la pression d'air varie de 10^{-2} mm Hg à 10^{-3} mm Hg. D'après l'expression (2) les résultats sont

$$\begin{aligned} T_1 &= 293 \text{ °K} : \tau = [8]^{10}_{10^{-2}-10^{-3}} \text{ secondes} \\ T_1 &= 200 \text{ °K} : \tau = [228]^{10}_{10^{-2}-10^{-3}} \text{ secondes} \\ T_1 &= 90 \text{ °K} : \tau = [396]^{10}_{10^{-2}-10^{-3}} \text{ secondes.} \end{aligned} \quad (13)$$

Conclusion. — Il est donc évident que conformément à la théorie, l'abaissement de la température de la paroi augmente la sensibilité de la thermistance. Toutefois il provoque une grande inertie de la thermistance. Les résultats pour l'échantillon N_1 montrent qu'en comparaison avec les mesures faites à $T_1 = 293$ °K, la sensibilité pour $T_1 = 200$ °K augmente 1,7 fois et l'inertie 28 fois, tandis que pour $T_1 = 90$ °K, σ augmente 3,3 fois et τ 50 fois. Les échantillons avec une plus grande résistance froide ont donné des résultats à peu près du même ordre de grandeur.

Cependant dans un système à vide dynamique, qui est aujourd'hui généralement utilisé, il est nécessaire que la jauge à vide indique à chaque instant les variations de la pression du gaz. Les mesures faites à l'aide d'une jauge qui ne répond au changement de la pression qu'après quelques minutes, ne sont pas utilisables en pratique.

Ces résultats sont en accord avec les résultats trouvés par Ellet et Zabel dont nous avons parlé déjà. Nous croyons d'onc qu'on peut conclure que l'abaissement de la température de la paroi des manomètres thermiques, quoiqu'il augmente la sensibilité de la jauge, a peu de valeur pour les mesures pratiques puisque les jauges sont trop inertes.

Nous tenons à remercier M. le Professeur Paic, pour les précieux conseils qu'il nous a donnés au cours de ce travail.

Manuscrit reçu le 28 mai 1957.

RÉFÉRENCES

[1] DUNOYER (L.), *Le Vide*, 1949, n° **20**, 571.
[2] VARICAK (M.), *Thèse*, Zagreb, 1957.
[3] VARICAK (M.), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1956, **245**, 893.
[4] KNUDSEN (M.), *Ann. Physik*, 1911, **34**, 593.
[5] BLEUZE (J.), *Onde électr.*, 1953, **33**, 497.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 7
TOME 18, JUILLET 1957, PAGE 73 A.

CALCUL DE L'INDUCTION ET DE SES DÉRIVÉES SUR L'AXE D'UNE LENTILLE ÉLECTRONIQUE MAGNÉTIQUE DE RÉVOLUTION

Par M. LAUDET,
Faculté des Sciences de Toulouse.

I. Introduction. — Différentes méthodes peuvent être utilisées pour étudier la topographie de l'induction B sur l'axe d'une lentille électronique magnétique de révolution. La plupart d'entre elles se ramènent en définitive à déduire B de la mesure du flux d'induction $\Phi(a, z)$ qui traverse un cercle de rayon a de même axe que la lentille étudiée.

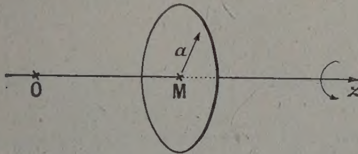


FIG. 1.

Deux dispositifs sont couramment utilisés pour effectuer cette mesure.

1° SYSTÈME PENDULAIRE. — M. V. Ments et Le Poole [1] déterminent la force F qui s'exerce sur une longue bobine parcourue par un courant i et dont l'axe coïncide avec celui de la lentille (*fig.* 2).

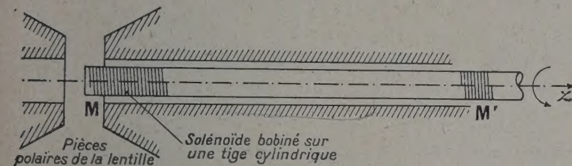


FIG. 2.

Lorsque l'extrémité M' de la sonde est située dans une région où l'induction est pratiquement nulle, la force F a pour intensité

$$F = ni\ \Phi(a, z)$$

n étant le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde, a son rayon.

La force F est proportionnelle au flux $\Phi(a, z)$.

2° SYSTÈME VIBRANT. — Ch. FERT et P. Gautier [2] font vibrer sinusoïdalement, parallèlement à son axe une longue bobine dont l'axe coïncide avec celui de la lentille (*fig.* 2).

Lorsque l'extrémité M' de la sonde est située dans une région d'induction nulle, la f. é. m. induite $\mathcal{E}$ a pour valeur

$$\mathcal{E} = nv\ \Phi(a, z)$$

v étant à l'instant t, la vitesse de translation de la sonde.

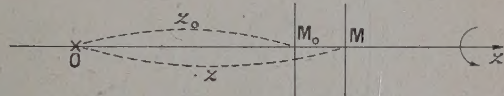


FIG. 3.

Posons :

$$z = z_0 + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = A \sin 2\pi\nu t.$$

On a :

$$\begin{cases} v = 2\pi\nu\ A \cos 2\pi\nu t \\ \Phi(a, z) = \Phi(a, z_0) + \varepsilon\Phi'(a, z_0) + \dots \end{cases}$$

et le terme fondamental de la f. é. m. induite $e = E \cos 2\pi\nu t$ a pour amplitude :

$$E = 2\pi\nu\ An\ \Phi(a, z_0)$$

E est proportionnelle au flux $\Phi(a, z_0)$.

On est donc, dans les deux cas, ramené à déduire l'induction $B(z)$ de la mesure du flux $\Phi(a, z)$. Différents artifices expérimentaux ou graphiques ont été utilisés pour cette détermination. Nous allons montrer comment on peut effectuer aisément ce calcul par les méthodes numériques.

II. Principe de calcul de B(z) à partir de $\Phi(a, z)$. — La fonction flux $\Phi(\rho, z)$ dont on connaît les valeurs aux limites $\Phi(a, z)$ et qui obéit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0 \qquad (1)$$

peut être calculée par la méthode des itérations successives dans tout le cylindre d'axe oz et de rayon a [3]. L'induction sur l'axe se calcule ensuite sans difficulté à partir de la relation

$$B(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=0}. \qquad (2)$$

Si l'on opérait ainsi, on serait obligé de recommencer les itérations successives et les différentiations numériques pour chaque lentille étudiée,

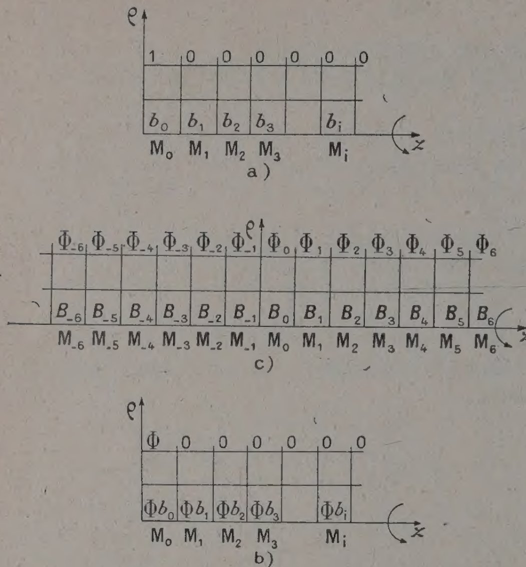


Fig. 4.

nous allons montrer qu'il est possible d'effectuer ces calculs une fois pour toutes et d'obtenir directement à partir de $\Phi(a, z)$ l'induction sur l'axe par un simple produit matriciel.

Supposons en effet connue la solution du problème dans le cas particulier où $\Phi(a, z)$ est nul pour toutes les valeurs de z sauf pour $z = 0$ où l'on a $\Phi(a, 0) = 1$. Cette répartition étant symétrique par rapport au plan $z = 0$, il suffit de considérer seulement le domaine correspondant à $z > 0$. Soit b_i la valeur de l'induction sur l'axe au nœud M_i du réseau ayant permis la détermination par itérations successives de $\Phi(\rho, z)$ (*fig.* 4*a*).

Les équations (1) et (2) étant linéaires, aux conditions aux limites :

$$\Phi(a, z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \neq 0 \quad \text{et} \quad \Phi(a, 0) = \Phi \quad \text{pour} \quad z = 0$$

est associée la solution Φb_i (*fig.* 4*b*) et à la distribution $\Phi(a, z)$ indiquée sur la figure 4*c* correspondra la solution :

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ B_n \\ \cdot \\ B_0 \\ \cdot \\ B_n \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{2n} & \ldots \\ b_1 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{2n-1} & \ldots \\ b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & b_{2n-2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{2n} & b_{2n-1} & b_{2n-2} & \ldots & b_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot \\ \Phi_{-n} \\ \cdot \\ \Phi_0 \\ \cdot \\ \Phi_n \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad (3)$$

obtenue par « superposition » de solutions $\Phi_k\, b_i$. La connaissance de la matrice élémentaire [b] ramène donc la détermination de la topographie de l'induction sur l'axe à la mesure du flux $\Phi(a, z)$ et au produit matriciel (3).

Dans le cas des systèmes symétriques c'est-à-dire des systèmes pour lesquels $\Phi_{-i} = \Phi_i$ et par suite $B_{-i} = B_i$ la relation (3) devient :

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 2b_1 & 2b_2 & \ldots & 2b_n & \ldots \\ b_1 & b_2 + b_0 & b_3 + b_1 & \ldots & b_{n+1} + b_{n-1} & \ldots \\ b_2 & b_3 + b_1 & b_4 + b_0 & \ldots & b_{n+2} + b_{n-2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & b_{n+1} + b_{n-1} & b_{n+2} + b_{n-2} & \ldots & b_{2n} + b_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n \\ \cdot \end{bmatrix}$$

La méthode précédente se généralise immédiatement au calcul des dérivées successives $B' = \mathrm{d}B/\mathrm{d}z$, $B'' = \mathrm{d}^2 B/\mathrm{d}z^2$, ... de l'induction sur l'axe des lentilles. En posant

$$b_i^{(0)} = b_i, \quad b_i^{(1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, b_i, \ldots, \quad b_i^{(m)} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m b_i, \ldots$$

la matrice élémentaire relative à $[b^{(m)}]$ a pour expression

$$\begin{bmatrix} \delta_m\, b_0^{(m)} & (-1)^m\, b_1^{(m)} & \ldots & (-1)^m\, b_{2n}^{(m)} \\ b_1^{(m)} & \delta_m\, b_0^{(m)} & \ldots & (-1)^m\, b_{2n-1}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{2n}^{(m)} & b_{2n-1}^{(m)} & & \delta_m\, b_0^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

avec

$$\delta_m = \begin{cases} 1 \text{ si } m \text{ pair ou nul} \\ 0 \text{ si } m \text{ impair} \end{cases}$$

et dans le cas particulier des systèmes métriques

$$\begin{bmatrix} \delta_m\, b_0^{(m)} & 2\delta_m\, b_1^{(m)} & \ldots\ldots & 2\delta_m\, b_n^{m} \\ b_1^{(m)} & b_2^{(m)} + \delta_m\, b_0^{(m)} & \ldots\ldots & b_{n+1}^{(m)} + (-1)^m\, b_{n-1}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n^{(m)} & & & b_{2n}^{(m)} + \delta_m\, b_0^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

avec

$$\delta_m = \begin{cases} 1 \text{ si } m \text{ pair ou nul} \\ 0 \text{ si } m \text{ impair.} \end{cases}$$

III. **Calcul numérique des matrices élémentaires** $[b^{(m)}]$. — La répartition du flux a été effectuée par la méthode des itérations successives à partir de l'équation aux différences finies

$$2I\,\Phi_0 = 2I\,\Phi_1 + (2I - 1)\,\Phi_2 + 2I\,\Phi_3 + (2I + 1)\,\Phi_4$$

Fig. 5.

dans laquelle $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_4$ désignent les valeurs du flux aux nœuds d'indice 0, 1, ... 4 et I le rapport ρ_0/h (*fig.* 5). Nous avons utilisé un réseau à mailles carrées de pas $h = a/10$ et les calculs ont été conduits en prenant pour $\Phi(a, 0)$ la valeur 10^8. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau 1. Pour ne pas surcharger la figure, on a supprimé les trois derniers chiffres significatifs. Les valeurs numériques indiquées dans le tableau correspondent à $\Phi(a, 0) = 10^5$. Les valeurs de b, b', b'' obtenues à partir de Φ par les formules classiques de dérivation numérique sont rassemblées dans le tableau 2.

IV. **Application au cas particulier d'une spire circulaire.** — Pour donner un exemple d'application de cette méthode et avoir une idée précise

TABLEAU 1

10^5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33 725	12 336	5 241	2 541	1 365	790	481	303	196	129	86	57	39	26	18	12	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0
14 951	9 823	5 766	3 371	2 018	1 244	787	508	333	221	148	100	67	46	31	21	15	10	7	5	3	2	1	1	1	0	0	0
8 040	6 597	4 666	3 121	2 051	1 346	888	590	395	266	180	122	83	57	39	26	18	12	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0
4 744	4 257	3 353	2 460	1 738	1 205	827	566	387	264	181	124	85	58	40	27	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0
2 854	2 662	2 232	1 743	1 300	941	669	470	327	227	157	108	75	51	35	24	17	11	8	5	4	3	2	1	1	1	0	0
1 656	1 573	1 369	1 114	864	647	473	339	241	169	118	82	57	39	27	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0
870	835	743	622	495	380	284	207	149	106	75	52	36	25	17	12	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0
369	356	321	274	222	173	131	97	71	51	36	25	18	12	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
89	87	79	68	56	44	34	25	18	13	10	7	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLEAU 2

$10\,\frac{z}{a}$	$10^6\,a^2\,b$	$-\,10^5\,a^3\,b'$	$10^4\,a^4\,b''$	$10\,\frac{z}{a}$	$10^6\,a^2\,b$	$-\,10^5\,a^3\,b'$	$10^4\,a^4\,b''$
0	28 145	0	— 1 775	16	358	133	47
1	27 277	1 696	— 1 546	17	246	93	35
2	24 890	2 983	— 994	18	169	63	24
3	21 514	3 665	— 376	19	116	44	17
4	17 751	3 779	118	20	79	30	12
5	14 090	3 492	424	21	54	20	8
6	10 838	2 992	552	22	37	15	5
7	8 128	2 427	563	23	24	11	4
8	5 975	1 890	503	24	16	6	3
9	4 323	1 428	420	25	11	4	2
10	3 090	1 054	329	26	7	3	1
11	2 187	765	252	27	4	2	1
12	1 537	547	186	28	2	1	0
13	1 074	388	135	29	1	0	0
14	747	273	97	30	0	0	0
15	518	190	68	31	0	0	0

des résultats auxquels on est conduit, nous calculerons l'induction B et ses dérivées B' et B'' sur l'axe d'une spire circulaire de rayon c parcourue par un courant d'intensité $I. B_0$ étant l'induction au centre de la spire, $B(z)$, $B'(z)$ et $B''(z)$ ont pour expression analytique :

$$B(z) = B_0 \frac{1}{(1 + z^2/c^2)^{3/2}}$$

$$B'(z) = -3 \frac{B_0}{c} \frac{z/c}{(1 + z^2/c^2)^{5/2}}$$

$$B''(z) = -3 \frac{B_0}{c^2} \frac{1 - 4z^2/c^2}{(1 + z^2/c^2)^{7/2}}.$$

D'autre part entre le potentiel vecteur A_φ au point $P(a, z)$ et le flux $\Phi(a, z)$ on a la relation [4]

$$\Phi = 2\pi a A_\varphi$$

avec

$$\begin{cases} A_\varphi = B_0 \dfrac{2c}{k\pi}\sqrt{\dfrac{c}{a}}\left[\left(1 - \dfrac{k^2}{2}\right)\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2\right] \\ k = \sqrt{\dfrac{4ac}{(c+a)^2 + z^2}} \\ \mathcal{J}_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \\ \mathcal{J}_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}\, d\psi. \end{cases}$$

TABLEAU 3

$10\frac{z}{a}$	$10^3 B/B_0$ Calculé	Exact	Erreur	$-10^3 aB'/B_0$ Calculé	Exact	Erreur	$10^3 a^2 B''/B_0$ Calculé	Exact	Erreur
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	998	1 000	— 2	0	0	0	— 743	— 750	7
1	994	996	— 2	74	74	0	— 729	— 736	7
2	983	985	— 2	145	146	— 1	— 688	— 695	7
3	965	967	— 2	211	213	— 2	— 625	— 631	6
4	941	943	— 2	270	272	— 2	— 544	— 549	5
5	911	913	— 2	320	322	— 2	— 451	— 455	4
6	877	979	— 2	360	363	— 3	— 352	— 355	3
7	840	841	— 1	390	393	— 3	— 254	— 255	1
8	800	800	0	411	414	— 3	— 160	— 161	1
9	758	758	0	423	426	— 3	— 75	— 75	0
10	715	715	0	427	429	— 2	0	0	0
11	673	673	0	424	426	— 2	61	63	— 2
12	631	631	0	415	417	— 2	111	113	— 2
13	590	589	1	402	404	— 2	149	151	— 2
14	550	549	1	386	388	— 2	176	178	— 2
15	513	512	1	368	369	— 1	195	197	— 2
16	477	476	1	348	348	0	206	207	— 1
17	443	442	1	327	327	0	210	211	— 1
18	411	410	1	306	306	0	210	211	— 1
19	382	381	1	285	285	0	206	206	0
20	354	353	1	265	265	0	199	199	0
21	329	328	1	246	246	0	190	190	0
22	305	304	1	227	227	0	179	179	0
23	283	282	1	210	210	0	169	169	0
24	263	262	1	194	194	0	158	157	1
25	244	244	0	179	178	1	147	146	1
26	227	227	0	165	164	1	136	135	1
27	211	211	0	152	151	1	125	125	0
28	197	197	0	140	139	1	115	115	0
29	183	183	0	129	128	1	106	106	0

Nous traiterons le cas particulier où $c = 2a$ et nous poserons $z = at$. Les formules précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} B/B_0 = (1 + 0{,}25\, t^2)^{-3/2} \\ aB'/B_0 = -0{,}75\, t(1 + 0{,}25\, t^2)^{-5/2} \\ a^2 B''/B_0 = -0{,}75(1 - t^2)\,(1 + 0{,}25\, t^2)^{-7/2} \\ \Phi/a^2 B_0 = 8\sqrt{2}\,\dfrac{1}{k}\,[(1 - k^2/2)\,\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2] \\ k = 2\sqrt{\dfrac{2}{9 + t^2}}. \end{cases}$$

Nous donnons dans le tableau (3) les valeurs exactes de B, B' et B'' calculées à partir des formules précédentes et celles résultant de l'application de la méthode étudiée à partir des valeurs exactes de $\Phi/a^2 B_0$ rassemblées dans le tableau (4). Les erreurs relatives sur B, B' et B'' sont respectivement inférieures à 0,002, 0,01 et 0,01.

V. **Conclusion.** — Tandis que la plupart des artifices proposés pour déterminer l'induction et ses dérivées à partir de le mesure du flux font appel à des sondes différentes ou tout au moins comportant différents enroulements, la méthode précédente utilise une sonde unique ne comportant qu'un seul enroulement. De plus elle permet l'usage de solénoïde dont le diamètre soit sensiblement égal à celui du canal des pièces polaires des lentilles étudiées.

Manuscrit reçu le 26 février 1957.

TABLEAU 4

$10\frac{z}{a}$	$10^7\,\Phi/a^2 B_0$	$10\frac{z}{a}$	$10^7\,\Phi/a^2 B_0$	$10\frac{z}{a}$	$10^7\,\Phi/a^2 B_0$
—	—	—	—	—	—
0	34 925 995	20	10 301 524	40	2 657 113
1	34 724 579	21	9 545 069	41	2 507 250
2	34 135 105	22	8 851 069	42	2 367 877
3	33 198 851	23	8 213 699	43	2 238 123
4	31 976 088	24	7 628 607	44	2 117 250
5	30 536 314	25	7 091 408	45	2 004 472
6	28 949 316	26	6 598 046	46	1 899 284
7	27 278 517	27	6 144 766	47	1 800 947
8	25 577 267	28	5 728 050	48	1 709 025
9	23 887 728	29	5 344 746	49	1 622 989
10	22 241 279	30	4 991 912	50	1 542 423
11	20 659 882	31	4 666 885	51	1 466 873
12	19 157 821	32	4 367 260	52	1 396 011
13	17 743 353	33	4 090 840	53	1 329 478
14	16 420 188	34	3 835 548	54	1 266 952
15	15 188 837	35	3 599 615	55	1 208 161
16	14 047 417	36	3 381 367	56	1 152 829
17	12 992 572	37	3 179 296	57	1 100 759
18	12 019 954	38	2 992 032	58	1 051 656
19	11 124 663	39	2 818 359		

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Appl. Research*, 1947, vol. B.
[2] *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 148-150.
[3] Durand (E.), Électrostatique et magnétostatique. Masson et Cie, éditeur, Paris, 1953, p. 461.
[4] Durand (P.), p. 491 et 519.

MÉTHODE DE MESURE PROPRE AU RADIOCARBONE 14

Par Mlle Sonia APELGOT,
Laboratoire Curie, Institut du Radium.

I. — Introduction

Dans une expérience de biologie, l'administration d'une substance à un animal doit en général être faite dans des conditions physiologiques. Si le produit est marqué par un radioélément, les radioactivités mesurées sans précautions particulières dans le matériel biologique, sont souvent faibles et à la limite de la détection de l'appareil de mesure le plus classique : le compteur cloche G. M. à fenêtre mince de mica. Pour pallier cet inconvénient, il existe deux possibilités : 1) Augmenter l'activité spécifique de la substance marquée initiale. 2) Utiliser un appareil de mesure plus sensible.

Dans une étude relative à une molécule marquée par le radio-brome [1], nous avons résolu le premier problème ; par contre dans les expériences où le carbone 14 est le traceur, on doit s'efforcer de résoudre le second par suite des difficultés inhérentes à cet isotope.

1) **Difficultés propres au radiocarbone.** — *a*) Le carbone 14. — Le carbone possède 4 isotopes qui sont ou stables, ou de courte période, et un isotope de longue période couramment utilisé : le carbone 14. Ce dernier est obtenu par bombardement de l'azote 14 avec les neutrons lents d'une pile atomique. On observe la réaction $^{14}N(n, p)\ ^{14}C$. Le composé irradié est généralement le nitrate d'ammonium ; le radiocarbone formé est extrait puis transformé en carbonate de baryum. C'est sous cette forme qu'il est vendu. Sa période est 5.900 ± 200 ans ; c'est un émetteur β pur. L'énergie de ces β est d'environ 0,15 MeV : c'est donc un rayonnement très mou dont la mesure est délicate et pose de nombreux problèmes.

b) Activité spécifique d'une molécule marquée par le ^{14}C. — Dans notre travail sur un œstrogène artificiel le β-bromo-α-α-β-triphényléthylène [1] nous avons exposé les conditions de formation d'un radioélément et rappelé que la quantité formée par gramme de substance irradiée, pour un flux de neutrons déterminé est fonction de sa section efficace de capture et de la durée d'irradiation. Si cette dernière reste courte devant la période et si la section efficace de capture est faible, la quantité de radioélément formée sera minime : c'est le cas du radiocarbone.

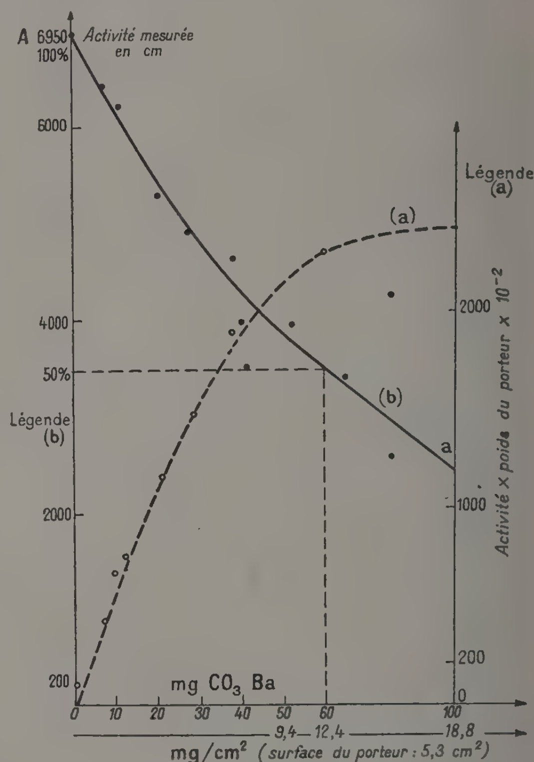


Fig. 1. — Courbes relatives aux β du ^{14}C dans le carbonate de baryum.
(*a*) Courbe de saturation.
(*b*) Courbe d'absorption.

Il semblerait, *a priori*, qu'on puisse concentrer la radioactivité de plusieurs cibles irradiées, dans une seule solution, comme nous l'avons fait pour le brome, dans notre travail déjà cité [1]. Cependant, étant donné la faible énergie des rayons β émis par le radiocarbone, 0,15 MeV, le rayonnement dissipe son énergie dans un faible volume à partir de l'atome émetteur ; cette énergie provoque une

auto-décomposition de la substance marquée. Ce phénomène a été signalé par différents auteurs (voir par exemple le travail de Lemmon [2]). On ne peut donc augmenter notablement les activités spécifiques des molécules marquées par le radiocarbone. En conséquence, il faudra rechercher les conditions optimales de mesure pour permettre la réalisation de l'expérience projetée. Nous allons examiner rapidement l'efficacité du compteur cloche Geiger-Muller pour le radiocarbone.

c) Mesure du ^{14}C avec le compteur cloche G. M. classique. — Les échantillons contenant le radiocarbone sont mesurés en général sous forme de radiocarbonate de baryum déposé en couche mince sur un porteur. Les rayons β, de faible énergie, sont facilement absorbés dans la matière ; en examinant la courbe d'auto-absorption des rayons β du ^{14}C dans le radiocarbonate de baryum lui-même (*fig.* 1), on voit que, dans nos conditions de mesure (1), l'auto-absorption de 50 % est obtenue pour une quantité de précipité de 66 mg correspondant à une densité superficielle de 12,4 mg/cm². En mesurant la radioactivité d'échantillons de carbonate de baryum d'activité connue, nous avons pu calculer l'efficacité de différents compteurs cloche à fenêtre de mica, dans le cas courant de mesures où l'auto-absorption est de 50 %. Ces résultats sont portés dans le tableau 1.

TABLEAU I

Efficacité de différents compteurs cloche à fenêtre mince de mica pour des porteurs de radiocarbonate de baryum d'activité connue
(Diamètre du porteur = diamètre de la fenêtre, porteur placé à 2 cm de la fenêtre, auto-absorption = 50 %.)

Densité de la fenêtre mg/cm²	Activité mesurée en c/m pour 1 mc	Efficacité
—	—	—
1,7	10 .10⁷	4,5 %
1,9	8,7.10⁷	4 %
3,5	5 .10⁷	2,3 %

Dans le cas des applications du radiocarbone à l'étude des problèmes biologiques, cette efficacité faible est nettement insuffisante pour les deux raisons suivantes :

α) *Présence de carbone dans l'organisme.* — Lorsqu'on injecte du radiobrome à un animal, c'est ce radiobrome et le brome entraîneur ajouté qui seront extraits et mesurés, parce que cet élément n'existe qu'à l'état de traces dans l'organisme. Au contraire, lorsqu'on injecte du radiocarbone à un animal, c'est ce radiocarbone et tout le carbone de l'échantillon qui seront extraits. Or le carbone est l'élément de base de l'organisme : il représente 50% du poids sec des tissus (ce dernier poids est approximativement 20 à 30 % du poids frais). En d'autres termes, 10 mg environ d'organe frais conduisent à 20 mg de carbonate de baryum. Nous avons vu que, pour être mesuré avec le compteur cloche, le porteur doit être fait avec environ 60 mg de carbonate de baryum ; la mesure de radioactivité portera donc sur un prélèvement de 30 mg de tissus frais au maximum. En conséquence, pour connaître la radioactivité totale d'un organe de 350 mg (700 mg de carbonate de baryum) on sera amené à faire des échantillonnages de poids inférieur à 30 mg qui sont toujours source d'erreurs.

β) *Métabolisme des substances administrées.* — On sait que les substances administrées diffusent dans tout l'organisme, sont métabolisées puis éliminées. Supposons qu'on administre 1 mg de substance marquée à une souris de 25 g. Le calcul montre que, si l'élimination n'existait pas, on retrouverait 1, 2 γ de substance dans 30 mg d'organe en supposant une répartition uniforme. En réalité, on en retrouve beaucoup moins, et cette quantité très petite n'est décelable qu'avec des substances marquées de grandes activités spécifiques.

d) Conclusions. — Dans une étude de métabolisme avec le radiocarbone comme traceur, les radioactivités mesurées ne sont pas, en général, supérieures à quelques c/m ; le mouvement propre d'un compteur cloche Geiger-Muller étant presque toujours du même ordre de grandeur, rend impossible une telle mesure avec une grande précision. Dans notre laboratoire, le mouvement propre d'un tel compteur était de 30 c/m à l'intérieur d'un château de plomb. Pour résoudre ce problème, il devient nécessaire d'utiliser un appareil de mesure plus efficace que le compteur Geiger-Muller et choisir parmi les quatre suivants : 1) le flow compteur ; 2) le compteur à scintillation ; 3) la chambre d'ionisation ; 4) le compteur à gaz carbonique.

C'est ce dernier type de compteur qui nous a paru le plus intéressant en raison de ses caractéristiques et notamment de sa grande efficacité.

2. Mesure du ^{14}C avec un compteur G. M. à gaz carbonique. — Dès 1947, Brown et Miller [3-4] avaient cherché à mesurer les rayons β du radiocarbone avec une grande efficacité en l'introduisant sous forme de gaz dans un compteur. La forme gazeuse choisie a été le gaz carbonique. On peut réaliser deux types de compteur Geiger Muller : *a*) Le type « non auto-coupeur » : si un ion positif arrive sur la cathode, il y a libération d'un ou plusieurs électrons secondaires par la parois ; ces électrons entretiennent la décharge. Il faut adjoindre un circuit électronique « coupeur » qui ramènera la tension au-dessous de la tension-seuil.

(1) Diamètre du porteur égal à celui de la fenêtre du compteur. Distance du porteur au compteur : 2 cm.

b) Le type « auto-coupeur » : ils contiennent en général une vapeur organique. Les molécules de ces gaz empêchent la formation d'électrons secondaires. Elles jouent le rôle de transporteurs de charges et rendent inutile le circuit électronique « coupeur ».

Les auteurs cités se sont attachés à mettre au point les compteur du type « a » ; ils ont étudié le comportement d'un grand nombre de gaz ajoutés au gaz carbonique, et leur choix s'est fixé sur le sulfure de carbone. Les caractéristiques de ces compteurs étaient : efficacité supérieure à 80 % ; tension-seuil fonction linéaire de la pression de gaz carbonique et indépendante du gaz secondaire ajouté ; pas de contamination d'un échantillon par un autre, si, entre chaque mesure, le compteur est vidé avec une pompe secondaire. Rempli alors de gaz carbonique inactif, le résultat de la mesure de radioactivité est identique à celui du mouvement propre initial. Les paliers ont une longueur supérieure à 150 volts et quelques pourcents de pente.

Depuis ce premier travail, de nombreux compteurs à CO_2/CS_2 ou du type « b » ont été étudiés et utilisés en biologie ; les caractéristiques ci-dessus ont été retrouvées.

Les compteurs à CO_2/CS_2 ont été étudiés en 1948 par Skipper [5] ; en 1950 et 1951 par Eidinoff [6 et 7] ; en 1953 par Henson [8] ; enfin en 1955 par Glascock [9].

Les compteurs du type « b » auto-coupeurs ont été étudiés :

Pour le mélange CO_2/argon/alcool en 1951 par Engelkemeir et coll. [10] ; en 1951 par Feldstein et coll. [11] ; en 1952 par Grenon et coll. [12] ; et en 1954 par Pfaff [13].

Pour le mélange CO_2/méthane en 1950 par Bernstein et coll. [14] ; en 1951 par Van Slyke et coll. [15] ; et en 1952 par Buchanan et coll. [16].

Enfin pour le mélange CO_2/alcool en 1951 par Labeyrie [17] et en 1955 par Delibrias [18].

Tous ces compteurs obligeaient la manipulation de deux ou trois gaz, quel que soit le type du compteur. En vue de simplifier les manipulations, on a essayé depuis 1953, d'utiliser des compteurs à gaz carbonique seul, en leur adaptant un circuit coupeur approprié. Dans ce domaine, il existe les travaux de Broda et coll. [19 à 21] et ceux de Bradley et coll. [22].

3. **Plan du travail.** — Les travaux antérieurs, relatifs au compteur à gaz carbonique, utilisaient un compteur dont le volume était inférieur à 30 cm³. Pour mesurer directement la radioactivité d'un organe d'environ 380 mg (poids frais d'un organe moyen de souris) il était nécessaire d'avoir un compteur de 200 cm³ de volume.

Dans ce mémoire nous décrirons tout d'abord la méthode utilisée pour attaquer, selon une méthode simple, 300 mg environ de matériel biologique (poids frais). Nous exposerons ensuite nos essais de mesures dans un compteur de 200 cm³ de volume, en utilisant d'une part le mélange gaz carbonique-alcool, et d'autre part le gaz carbonique seul. Nous donnerons enfin le compte rendu d'une expérience biologique montrant l'efficacité de nos méthodes.

Nous tenons à remercier vivement les électroniciens du Laboratoire Curie de l'Institut du Radium qui nous ont construit les compteurs et ont mis au point les différents circuits électroniques expérimentés.

II. — Méthode d'attaque des échantillons.

1. **Généralités.** — Comme dans le cas du brome nous avons utilisé l'attaque argento-sulfo-chromique [1], en y apportant les modifications nécessaires.

Nous allons examiner les quatre points principaux suivants : l'appareil, le mélange oxydant, l'absorbeur, la précipitation.

L'APPAREIL. — Pour doser le carbone, il est évident qu'il faut opérer en circuit fermé pour éviter toutes contaminations par le gaz carbonique de l'atmosphère. Nous avons donc dû abandonner ici l'appareil de Zacherl [1] pour utiliser celui de Wendel modifié par Dontcheff [23].

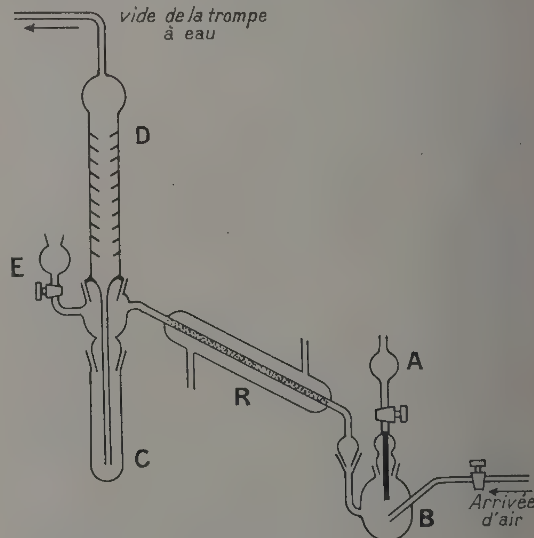


FIG. 2. — Appareil de Wendel modifié.

Cet appareil est représenté, sur la figure 2. Il se compose : d'un ballon de minéralisation : B ; d'une ampoule pour l'acide sulfurique : A ; d'un réfrigérant à pointes : R ; d'un absorbeur vigreux : D ; d'un tube contenant la soude : C ; d'une ampoule latérale annexe : E.

Le mélange oxydant. — Nicloux [24] avait montré que des composés tel l'acide acétique, distillant en présence des bichromates, échappaient au dosage. Cet inconvénient majeur disparaissait en substituant les chromates aux bichromates. C'est pourquoi nous avons modifié notre mélange oxydant et avons utilisé les réactifs suivants :


SO_4H_2 ; CrO_4Ag_2 ; CrO_4K_2 ; SO_4Na_2.

Comme pour le brome, le mélange oxydant ne doit pas être vert en fin de réaction. L'expérience nous a montré que sans précautions particulières, des erreurs appréciables apparaissent par suite du carbone parasite introduit par les graisses et les réactifs eux-mêmes. Pour les diminuer au maximum, il faut proscrire l'usage de toutes graisses (même celles aux silicones) comme le signalait Van Slyke [25]. Nous avons obtenu entière satisfaction en utilisant comme lubrifiant des rodages et robinets une solution saturée d'anhydride phosphorique. Il faut enfin décarbonater ces réactifs, même ceux qui, commercialement, sont vendus comme très purs. La technique que nous avons utilisée a fait l'objet d'une note de laboratoire [26] ; nous ne la décrirons pas ici. Il est pourtant impossible de supprimer totalement le carbone parasite et on doit en tenir compte dans les dosages en le testant soigneusement au préalable dans des essais à blanc dits « témoins ».

Comme *absorbeur* nous avons utilisé une solution de soude décarbonatée. Pour obtenir une telle solution il faut avoir à sa disposition une solution saturée (14 N) de soude (dans laquelle le carbonate de sodium est insoluble) et la diluer au titre voulu au moment de son emploi. Le gaz carbonique dégagé dans l'attaque se transforme en carbonate de sodium dans cette solution. Pour *précipiter* le carbonate de sodium en carbonate de baryum, nous avons employé la technique classique décrite dans la littérature [27] à savoir : précipitation vers 35-40 °C par le mélange d'une solution de chlorure d'ammonium et de chlorure de baryum de titre bien déterminé. La durée de la précipitation est de 10 minutes ; le précipité est lavé à l'eau puis par un mélange alcool (3 P.) et éther sulfurique (1 P.). Les décantations se font par centrifugation. Le rendement de cette précipitation est de 98 %.

2. **Description d'une expérience.** — La méthode mise au point nous a permis d'attaquer soit 20 mg, soit 300 mg de tissus frais correspondant à soit 2,5 mg, soit 36 mg de carbone. On homogénise toujours le mélange oxydant dans une boîte de pesée avant de l'introduire dans le ballon B. On y ajoute les produits à attaquer. Dans l'ampoule A est versé l'acide sulfurique [2]. La soude décarbonatée est versée dans l'ampoule E. On plonge le ballon dans un bain d'huile chauffé par un bec Bunsen. L'appareil étant monté, on règle le vide pour que le courant d'air qui traverse deux gardes, l'une à ascarite et l'autre contenant une solution saturée de potasse, puisse se décarbonater. En laissant ce courant d'air balayer l'appareil pendant 10 minutes on chasse en majeure partie l'air initial. A ce moment, on verse la soude dans C et l'acide dans B. (On a soin de laisser dans chaque ampoule les dernières gouttes qui assureront l'étanchéité du robinet.) On vérifie le vide pour que le liquide ne dépasse pas le quart inférieur de la boule de sûreté de la colonne D. On porte rapidement la température du bain d'huile à 140 °C et on maintiendra cette température durant toute l'attaque [2]. Pendant ce temps le gaz carbonique formé en B est entraîné en D où son absorption dans la soude le transforme en carbonate de soude. L'attaque terminée on enlève le bain d'huile, on ferme le robinet du vide et on lave la colonne D avec 3 cm³ d'eau distillée. On détache le tube C et on y précipitera [2] le carbonate de sodium en carbonate de baryum selon la technique décrite. Nos tubes C ont été construits pour s'adapter à la centrifugeuse que nous avions à notre disposition. De cette façon, précipitation et lavages du précipité pouvaient se faire dans le même tube sans nécessiter de transvasement. Ce précipité de carbonate de baryum peut servir à diverses fins. Lorsqu'on veut effectuer :

α) Un dosage gravimétrique : Il sera simplement séché à 110 °C jusqu'à poids constant.

β) Un dosage volumétrique : Il sera dissous dans un excès de solution titrée d'acide chlorhydrique qu'on dosera en retour par une solution titrée de potasse en présence d'hélianthine.

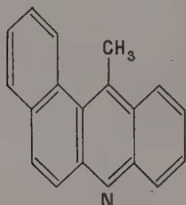
γ) Un dosage par radioactivité : Pour les attaques de faible quantité de matière il sera déposé sur un porteur approprié selon la technique classique [27] ; pour les attaques de grande quantité de matière il sera séché 10 minutes à 110 °C et mesuré au compteur à gaz carbonique.

Pour attaquer un échantillon contenant 2,5 *mg de carbone.* — Le tableau II « colonne a » donne les proportions des réactifs et les conditions d'attaque et de précipitation. Dans ce cas, on obtient : 6 mg de carbonate de baryum pour les témoins et 40 mg de carbonate de baryum par essai.

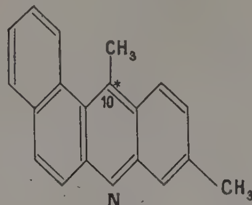
Les conditions de l'attaque ont été déterminées en minéralisant dans notre installation du carbonate de sodium, puis de l'acide benzoïque. Les rendements calculés à partir d'un dosage volumétrique à 1 % ont été de 95 % en moyenne. Nous avons retrouvé le fait signalé par Claycomb [30] que le rendement est meilleur lorsque le ballon est chauffé par l'intermédiaire d'un bain d'huile. Nous avons retrouvé ce rendement de 95 % en attaquant

[2] Les proportions des réactifs et durées d'attaques sont données dans le tableau global II.

un hydrocarbure particulier, la 10-méthyl-5-6-benzacridine dont la formule est la formule 1 :



Formule 1



Formule 2

Le composé qui nous intéressait particulièrement à cause de son action biologique était la 2,10-diméthyl-5-6-benzacridine dont la formule est la formule 2. Nous avons utilisé une telle molécule marquée en position 10 par le radiocarbone et préparée au laboratoire par Mme DAUDEL et coll. [28].

La technique de prises d'essais équivalentes à des γ a été celle décrite dans notre travail sur le radio-bromo-triphényl-éthylène [1].

Pour attaquer un échantillon contenant 36 *mg de carbone.* — Le tableau II « colonne b » donne les proportions des réactifs, et les conditions d'attaque et de précipitation. Ces attaques conduisent à : 90 mg de carbonate de baryum pour les témoins ; 600 mg de carbonate de baryum par essai, souillé d'une quantité de sulfate de baryum inférieure à 10 mg.

Les premiers essais ont montré qu'il était impossible d'utiliser l'appareil de 25 cm³ servant aux attaques précédentes, en travaillant avec des solutions très concentrées : dans ce cas des réactions secondaires prennent naissance. En augmentant le volume du ballon de réaction nous avons pu retrouver une concentration correcte de notre mélange oxydant en utilisant les proportions de réactifs portés dans le tableau II « colonne b ».

L'expérience a alors montré qu'après 60 minutes d'attaque, le rendement était seulement égal à 86 %. La seule façon de retrouver le rendement initial de 95 % a été de substituer une colonne d'absorption à serpentin à la colonne Vigreux initiale et de prolonger l'extraction du gaz carbonique dissous dans le mélange oxydant durant environ 2 heures (mais ce temps pourrait peut-être être diminué). En substituant un réfrigérant à boules au réfrigérant à pointes initialement utilisé, nous avons pu éliminer en majeure partie les vapeurs d'acide entraînées dans la soude ; en présence du chlorure de baryum elles y donnaient du sulfate de baryum.

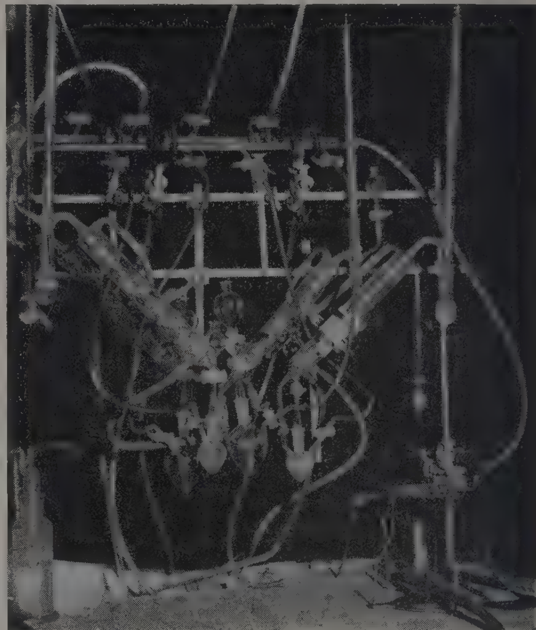
Comme dans les expériences avec le radiobrome [1], les *organes* ont été attaqués, dans tous les cas, après avoir été transformés en poudre avec le sable de Fontainebleau et le sulfate de soude anhydre.

Nous terminerons ce chapitre en donnant quelques résultats de l'attaque d'échantillons radioactifs.

3. **Résultats.** — Le rendement de l'attaque a été étudié par la mesure de l'activité spécifique d'échantillons identiques de 2-10-diméthyl-5-6-benzacridine marquée en position 10 par ^{14}C (formule 2).

Les résultats portés dans le tableau III montrent que, aux erreurs expérimentales près, l'activité spécifique est bien constante.

L'attaque de la benzacridine en présence de poudre de foie de souris a montré que l'entraîneur n'était pas ici nécessaire : le carbone de l'organe joue ce rôle, comme le montrent les résultats portés dans le tableau IV.



PHOTOGRAPHIE 1.
Les 4 appareils d'attaque.

Pour simplifier nos expériences, nous avons utilisé dans tous les cas les colonnes à serpentins, les réfrigérants à boules et soit le ballon d'attaque de 25 cm³ avec son ampoule à acide sulfurique, soit l'ensemble correspondant au ballon d'attaque de 100 cm³.

La photographie 1 montre un groupe de 4 appareils.

III. — Méthode de mesure.

La méthode d'attaque décrite nous permettait d'obtenir des quantités de carbonate de baryum

TABLEAU II

CARACTÉRISTIQUES DES 2 TYPES D'ATTAQUE

	a) Petit appareil	b) Grand appareil	
Quantité d'organe frais attaqué	20 mg	300 mg	
CO_3Ba total récupéré	46 mg	690 mg	
Durée chauffage à 140 °C	45 minutes	60 minutes	
Durée extraction du CO_2	0	2 heures	
SO_4H_2	5 cm³	40 cm³	
SO_4Na_2	200 mg	1,2 g	Lavage de la colonne
CrO_4K_2	300 mg	3,3 g	avec 3 cm³ d'eau
CrO_4Ag_2	150 mg	1,650 g	
NaOH	4 cm³ Sol N	8 cm³ Sol 2N	
Sol cl_2Ba	5 cm³ Sol N	5,3 cm³ Sol 3N	
Sol $clNH_4$	5 cm³ Sol $\frac{N}{2}$	1,7 cm³ Sol 3 $\frac{N}{2}$	
Volume du ballon	25 cm³	100 cm³	

TABLEAU III

ATTAQUE DE LA 2-10-DIMÉTHYL-5-6-BENZACRIDINE MARQUÉE EN 10 PAR LE RADIOCARBONE, EN PRÉSENCE DE 2,5 mg DE LA SUBSTANCE ENTRAINEUR

Quantité en γ	0,542	1,222	0,510	1,197	0,894	0,869	0,643	1,260
Activité spécifique c/m/γ	104 ± 10	112 ± 6	109 ± 13	109 ± 6	96 ± 6	102 ± 8	121 ± 10	97 ± 7

TABLEAU IV

ATTAQUE DE LA RADIO 2-10-DIMÉTHYL-5-6-BENZACRIDINE EN PRÉSENCE DE 15 mg DE FOIE DE SOURIS TRANSFORMÉ EN POUDRE SÈCHE

a) Avec 1 mg B. A. entraineur		b) Sans entraineur	
q. B. A. * γ	Activité spécifique c/m/γ	q. B. A. * γ	Activité spécifique c/m/γ
0,795	54 ± 4	0,795	54 ± 4
0,787	57 ± 5	0,795	56 ± 5
0,771	45 ± 5	0,787	58 ± 5
		0,795	60 ± 5

pouvant aller jusqu'à 700 mg. Dans ce chapitre nous décrirons le compteur qui a servi à nos mesures et l'installation permettant de libérer quantitativement le gaz carbonique à partir du carbonate de baryum, de remplir ou de vider le compteur. Nous donnerons enfin les résultats obtenus.

1. Le compteur à CO_2 et son installation. — Dans nos premiers essais nous avons utilisé un compteur en verre recouvert d'une couche d'aquadag. Nous avons abandonné ce type de compteur, l'expérience nous ayant montré qu'il était photo-sensible et que les décharges parasites augmentaient au cours du temps.

Le *compteur utilisé* dans ce travail a été fabriqué au laboratoire Curie. Il est formé d'un cylindre en laiton, nickelé à l'intérieur. Son diamètre est 3 cm et sa longueur 27 cm. L'anode est un fil de tungstène de 0,01 mm d'épaisseur, tendu au centre. A la partie inférieure s'adapte un doigt en verre qui permettra d'y piéger les gaz ; à la partie supérieure se trouve la fiche haute tension, et une tige en verre portant un rodage et un robinet. Les soudures verre-métal sont faites avec une cire anglaise n° 6 de chez Edwards & C°. Le schéma est donné sur la figure 3.

L'*installation* que nous avons utilisée a été réalisée d'après celle de Broda et coll. [21]. Son schéma est donné figure 4. Elle comprend essentiellement : le compteur G relié à la rampe à vide par le fritté F ; une ampoule A ; un tube B ; une garde desséchante C à perchlorate de magnésium ; un tube D ; une réserve à gaz carbonique E ; une garde H contenant de la soude ; un manomètre à mercure I.

Les éléments relatifs au vide sont : pour le vide primaire, une pompe à palettes Edwards à 2 étages ; pour le vide secondaire, une pompe à diffusion de mercure.

Les éléments relatifs à la mesure de la radioactivité sont : une alimentation et un numérateur classique ; une tension de 5 000 volts ; un circuit électronique spécial.

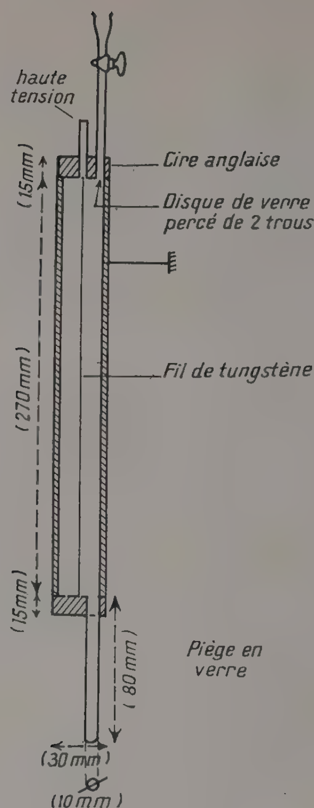


Fig. 3. — Le compteur.

2. **Description d'une manipulation.** — (Tous les réactifs sont des produits Prolabo R. P. Le perchlorate de magnésium a été déshydraté 1 heure sous vide à 130 °C).

Le principe de la manipulation est le suivant : après ses lavages, le carbonate de baryum obtenu est séché à 100 °C. On en libère sous vide le gaz carbonique par l'acide perchlorique à 50 %. Un vide secondaire a été établi dans tout l'appareil (*fig.* 4), jusqu'au robinet 3 (la pression est inférieure à 10^{-3} mm de Hg). On met le carbonate de baryum dans le tube B et l'acide perchlorique dans l'ampoule A. Le robinet 5 étant fermé, on fait en B un vide primaire par les robinets 3 et 4 ; puis un vide secondaire par le robinet 5 en fermant 4. Au bout d'une dizaine de minutes le vide en B est suffisant ; on ferme tous les robinets et on plonge le tube D dans un Dewar contenant de l'azote liquide. On fait tomber l'acide perchlorique sur le carbonate : la réaction est instantanée. En ouvrant le robinet 3, le gaz carbonique va passer en C où existe le vide. On ferme 3 et on termine l'attaque du carbonate en versant encore un peu d'acide. Pour vider C, il suffit d'ouvrir le robinet 5 : instantanément le gaz carbonique va dans le piège D [3]. En répétant plusieurs fois ces manipulations on épuise totalement le gaz carbonique qui se trouvait en B. L'attaque et le passage du gaz carbonique en D se font à 100 %. En ouvrant 6, on pompe quelques secondes sur le gaz carbonique solide pour éliminer tout ce qui n'est pas condensable. On ferme 6 et 5 ; on trouve 7 et on retire le Dewar pour permettre au gaz de se détendre dans la rampe et sur le manomètre. On lit sa pression, connaissant les volumes respectifs du compteur et

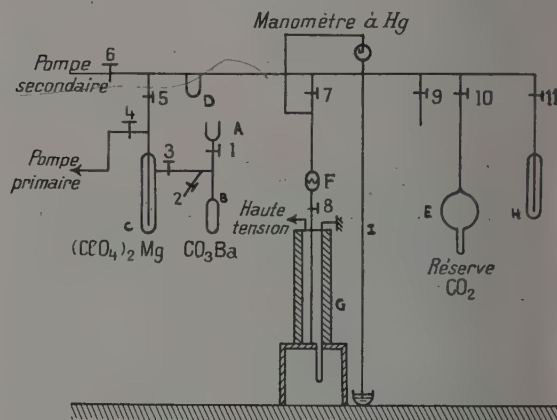


Fig. 4. — L'installation du compteur à CO_2.

de la rampe, on calculera la pression que créera le gaz dans le compteur. Le petit piège du compteur est refroidi dans de l'azote liquide, et en ouvrant 8 le gaz carbonique s'y solidifiera.

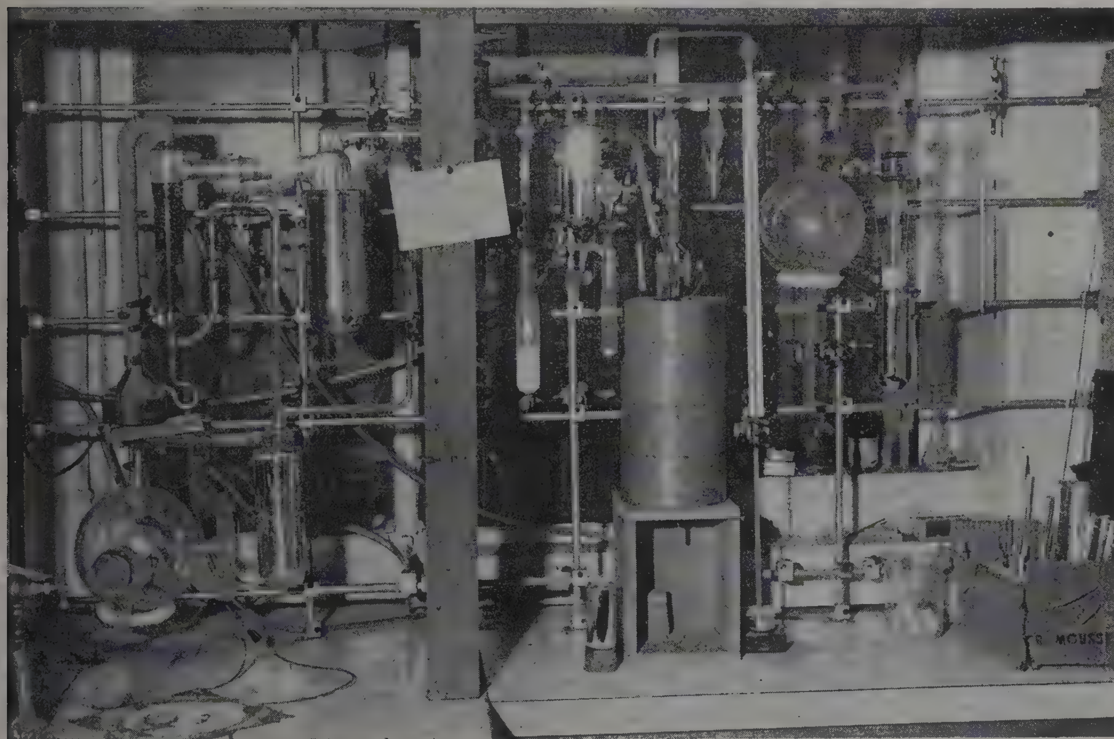
Lorsque le mercure du manomètre est revenu à sa position initiale, on ouvre 6 pour éliminer une dernière fois toutes les vapeurs non condensables. La manipulation se termine alors en fermant 6, 7 et 8 et en retirant l'azote liquide. Le gaz se détend dans le compteur. On introduit de la même façon le gaz qu'on désire ajouter au gaz carbonique et qui se trouve dans une ampoule en 9. La mesure de radioactivité terminée, on vide le compteur en le mettant en relation avec le piège à soude H refroidi au préalable dans de l'azote liquide. Il suffira de pomper quelques instants sur le compteur avec la pompe à diffusion pour supprimer tout danger de contaminations. Pendant la durée de la mesure de la radioactivité on a pu refaire le vide sur un nouvel échantillon de carbonate placé en B ; une nouvelle attaque est possible (par le robinet 2 se font les rentrées d'air en B).

La durée totale de ces manipulations depuis le stade carbonate de baryum jusqu'à l'absorption du gaz sur la soude est de 45 minutes pour un temps de

[3] On pourrait aussi piéger le gaz directement dans C refroidi dans de l'azote liquide ; mais dans ce cas on y piège aussi de l'acide perchlorique.

mesure de 15 minutes. Les traces de sulfate que peuvent contenir les précipités de carbonate de baryum ne sont pas gênantes, puisqu'elles ne sont pas attaquées par l'acide perchlorique à 50 %.

Le ballon E est une réserve à gaz carbonique destinée à mesurer les mouvements du compteur ou à compléter un échantillon si sa pression dans le compteur était insuffisante. Pour nos essais avec l'alcool, la réserve d'alcool s'adaptait en 9. F est un fritté destiné à arrêter les poussières que le gaz carbonique pourrait entraîner. La photographie 2 montre notre installation.



Photographie 2.
L'installation du compteur à gaz carbonique.

3. **Résultats.** — Avant chaque mesure de radioactivité, il faut vérifier l'existence du palier du compteur : mais des mesures de 1/2 minute suffisent. En opérant comme nous venons de le décrire, nous n'avons jamais observé de contaminations, ni de pertes de gaz carbonique. Nous avons pu vérifier que la tension d'utilisation de ces compteurs était une fonction linéaire de la pression du gaz carbonique.

(*a*) Compteur avec CO_2-alcool. — Nous avons utilisé ce compteur avec un préamplificateur classique du type « temps-mort », du C. E. A. La pression d'alcool utilisée a été de 1,2 à 1,5 cm de mercure quelle que soit la pression du gaz carbonique.

Nous n'avons obtenu de bons paliers que pour des pressions de gaz carbonique inférieures à 10 cm [un exemple donné figure 5 (*a*)]. Pour des pressions de gaz carbonique supérieures, nous avons obtenu des paliers qui se détruisaient rapidement au cours du temps : leur pente était déjà bien plus grande 30 minutes après le remplissage [exemple donné sur la figure 5 (*b*)]. Comme l'intérêt de notre compteur disparaissait à ces bases pressions, nous avons supprimé l'alcool.

(*b*) Compteur avec CO_2 seul. — Ce compteur a pu fonctionner correctement grâce à un circuit électronique « coupeur » (son schéma est représenté par la figure 6).

α) *Fonctionnement de principe du circuit coupeur utilisé.* — Supposons qu'une impulsion sortant du compteur ait une amplitude A aux bornes de la résistance de 32 MΩ. Cette impulsion négative à l'origine, sort positive de la lampe V_2, puis déclenche le multivibrateur V_3. Celui-ci, à son tour, délivre une impulsion rectangulaire caractérisée par

une amplitude positive d'environ + 40 volts et une durée θ d'environ 70 μs définie par le réseau résistance — capacité R. C. Le multivibrateur aura donc mis en forme la tension qui lui était appliquée. Ce signal positif venant de V_3 sera inversé par V_4 et enfin dirigé sur la grille de la lampe V_1 qui se ferme pendant la durée θ, coupant ainsi la T. H. T. du compteur. Celui-ci peut ainsi revenir à son état initial pour s'ioniser à nouveau sous l'action d'une nouvelle particule.

On remarquera que la constante de temps du circuit est relativement grande. Ceci est dû à la longueur du compteur utilisé : en effet, cette longueur influe sur celle de l'impulsion de sortie.

β) *Résultats.* — Pour des pressions de gaz de 20 à 40 cm de mercure, nous avons toujours obtenu d'excellents paliers de 250 à 500 volts de long avec une pente de 3 à 6 % (un exemple de palier est donné figure 7). Le mouvement propre du compteur indépendant de la pression du gaz, est de 80 c/m lorsque le compteur est dans un château de plomb de 5 cm d'épaisseur. La tension d'utilisation est 4 950 volts pour une pression de gaz de 40 cm de mercure ; elle est de 4 350 volts pour la pression courante de 35 cm.

γ) *Efficacité de ce compteur.* — L'attaque d'échantillons de radiocarbonate de baryum de radioactivité connue a permis de vérifier l'efficacité de de compteur qui est théoriquement voisine de 100 %.

Les résultats portés dans le tableau V montrent qu'elle est en fait de 86 ± 5 %.

Le tableau VI compare l'efficacité de ce compteur à celle de différents compteurs cloche à fenêtre de mica. On voit qu'il est pratiquement 20 fois plus sensible que le meilleur d'entre eux.

Ces résultats ont fait l'objet d'une note préliminaire en 1955 [29].

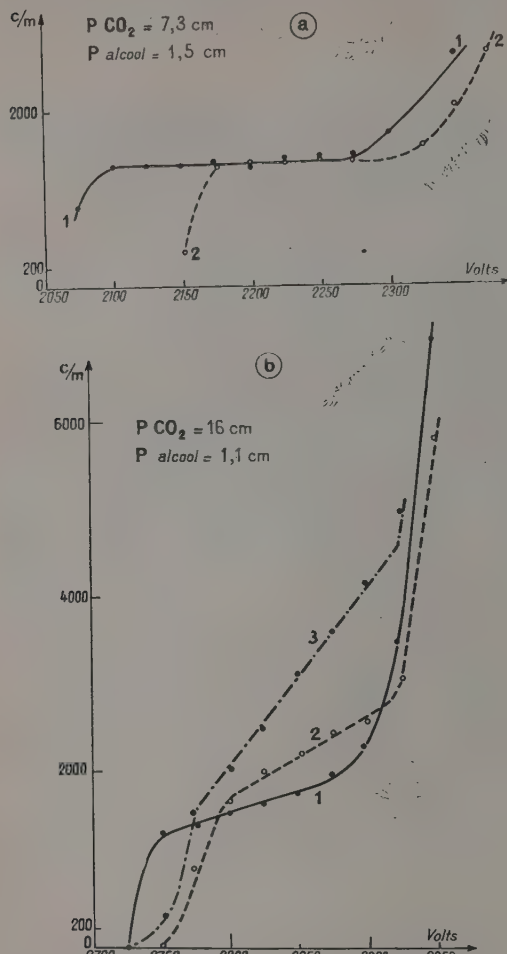


Fig. 5. — Compteur à CO_2-alcool.

a. Courbe 1 : après le remplissage du compteur.
Courbe 2 : 1 heure après le remplissage reste valable 19 heures et plus.

b. Courbe 1 : après le remplissage du compteur.
Courbe 2 : 40 minutes après 1.
Courbe 3 : 1 heure 1/2 après 1.

Équivalences intéressantes. — Pour un compteur de 200 cm³ de volume :

a) à 1 m. mol. CO_3Ba = 197 mg correspondra une pression de CO_2 = 9,6 cm de Hg ; *b*) à 100 mg de poids frais d'organe correspondra environ 200 mg de CO_3Ba soit environ 1 m. mol. de CO_3Ba ; *c*) à 350 mg de poids frais d'organe correspondra envi-

TABLEAU V

Efficacité du compteur a CO_2
(Le carbonate utilisé est un produit en provenance de Harwell)

CO_3Ba	Activité mesurée c/m	Efficacité %
800 mg	3 622 ± 216	89 ± 5
800 mg	3 526 ± 210	86,6 ± 5
800 mg	3 500 ± 210	85,6 ± 5
800 mg	3 390 ± 214	83,3 ± 5
800 mg	Activité théorique 4068 d/m	

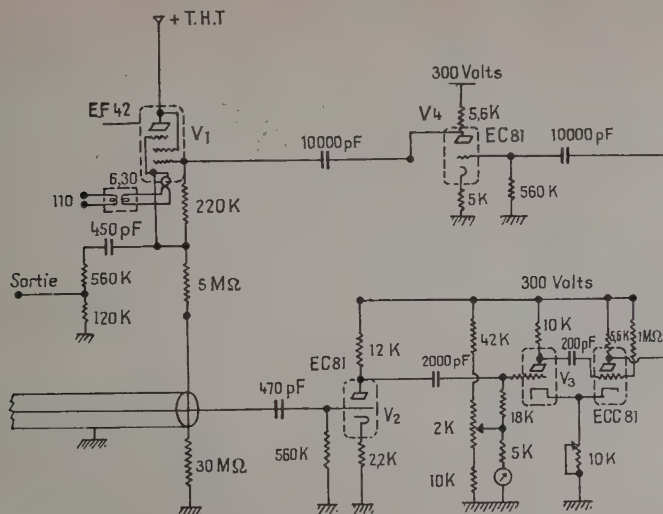


Fig. 6. — Schéma du multivibrateur.

ron 700 mg CO_3Ba + 90 mg CO_3Ba témoin soit une pression CO_2 = 38,5 cm de Hg.

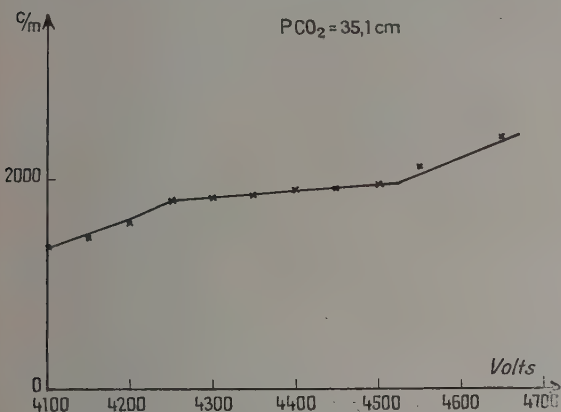


Fig. 7. — Un palier du compteur à CO_2 seul.

IV. — Conclusions et application à une expérience biologique.

La méthode de mesure mise au point, rend possible la recherche et le dosage précis, dans les échantillons biologiques, de la radioactivité qui aurait échappé dans la méthode classique.

Supposons que nous ayons 3 c/m mesurés sur du carbonate de baryum provenant de 20 mg d'un des 2 reins de souris dont le poids total est de 350 mg (cas favorable d'une auto-absorption de 50 % et d'un compteur cloche à fenêtre de mica de 1,7 mg/cm²). Nous avons calculé ce qui serait mesuré dans ce cas, avec un compteur cloche ou avec un compteur à gaz carbonique et l'erreur correspondante (on suppose un temps de mesure uniforme de 20 minutes pour le calcul d'erreurs). Les résultats de ce calcul sont portés dans le tableau VII.

TABLEAU VI

Comparaison de l'efficacité de différents compteurs Geiger-Muller

	Compteur	Activité mesurée et corrigée de l'auto-absorption	Cas idéal : auto-absorption nulle — R	Cas courant : auto-absorption de 50 % — R
	—	—	—	—
	CO_2	3 290 c/m		
Densité de la fenêtre de mica du compteur	1,7 mg/cm²	295 c/m	11	22
	1,9 mg/cm²	242 c/m	13,6	27
	3,5 mg/cm²	148 c/m	22	44

Chaque activité portée est la moyenne de 3 mesures d'échantillons similaires ; le porteur est à 1,5 cm de la fenêtre du compteur.

R est le rapport entre l'activité mesurée au compteur à CO_2 et celle mesurée au compteur cloche.

Le tableau VII montre que le compteur à gaz carbonique permet de mesurer rapidement avec une excellente précision la radioactivité d'échantillons de 350 mg ; pour un même temps de mesure, le compteur cloche donne le résultat avec une très grande erreur et oblige à faire de nombreux échantillonnages.

Dans le cas de mesures de la radioactivité contenue dans des échantillons de faible poids (glandes endocrines de souris par exemple), le compteur à gaz carbonique de 200 cm³ de volume, améliore encore les mesures par rapport à un compteur cloche. Mais son mouvement propre, relativement élevé, lui fait perdre une partie de son intérêt.

Enfin, dans ce cas, il faut ajouter du gaz carbonique entraîneur pour avoir un fonctionnement correct de ce compteur. Il devient alors plus intéressant d'avoir à sa disposition un compteur à gaz carbonique de faible volume qui aura un mouvement propre plus faible. Nous avons réalisé un tel compteur, de 20 cm³ de volume et pouvant s'adapter à notre installation. Le circuit coupeur déjà décrit a été également efficace pour ce deuxième compteur dont les paliers ont été semblables à ceux obtenus avec le premier et le mouvement propre n'a été que de 6 c/m à l'intérieur d'un château de plomb. Connaissant l'efficacité respective de chacun de ces deux compteurs, il devient possible de les utiliser indifféremment au cours d'une même expérience, selon le poids des échantillons à mesurer.

Pour illustrer l'amélioration constatée théoriquement par le calcul précédent, nous décrirons deux expériences biologiques parallèles : l'appareil de mesure de l'une étant le compteur cloche ; le compteur à gaz carbonique étant celui de l'autre.

Expériences biologiques. — Elles ont porté sur l'étude du métabolisme d'un hydrocarbure peu cancérogène, le 2-10-diméthyl-5-6-benzacridine, marquée en position 10 par le radiocarbone 14. (Cette molécule a été mentionnée formule 2.)

Les animaux d'expériences ont été des souris mâles de la ligne XVII de l'Institut du Radium. Pendant la durée de l'expérience, ils étaient placés dans des cages à métabolisme spéciales permettant de recueillir l'urine non souillée de fèces ; les fèces non souillées de débris alimentaires et le gaz carbonique en l'absorbant dans une solution de soude.

Comme la molécule étudiée est toxique, pour les souris, à une dose supérieure à 500 γ, chaque animal a été injecté avec 250 à 350 γ en solution dans 1/20e cm³ d'huile d'olive neutralisée.

L'injection a été faite dans le muscle de la cuisse pour permettre de délimiter avec précision « le lieu d'injection ».

Les animaux ont été sacrifiés 4 à 7 jours après l'injection par ponction du sang cardiaque sous anesthésie à l'éther. Les prélèvements d'organes ont été mis dans des boîtes tarées et fermées pour permettre leur pesée précise.

Dans l'expérience où le compteur cloche a été l'appareil de mesure, 271 γ de la substance ont été injectés respectivement à deux souris mâles de 22 et 24 g ; dans ces conditions de mesure, la quantité injectée correspondait à 54 200 c/min.

Dans la seconde expérience, où l'appareil de mesure a été le compteur à gaz carbonique, deux souris mâles de 29 g chacune ont été injectées respectivement avec 240 γ de la même substance ; dans ces conditions de mesure, cette quantité injectée correspondait à 572 000 c/m. Le premier animal est mort le 5e jour, le second fut sacrifié le 7e.

Dans les résultats, nous négligerons les mesures de la radioactivité des urines, fèces et lieu d'injection qui sont facilement mesurables avec un compteur cloche, pour nous attacher essentiellement aux mesures de la radioactivité de différents organes et du gaz carbonique de la respiration. Les moyennes des résultats de ces mesures sont portées dans les tableaux VIII A et B. La comparaison de ces deux tableaux montre l'apport du compteur à gaz carbonique. Cet appareil de mesure a permis de voir que tous les organes contenaient de la radioactivité au moment du sacrifice et de préciser sa valeur. Enfin il a permis de constater que le gaz carbonique respiratoire était radioactif ; ce dernier résultat montre que le noyau central de la benzacridine étudiée est ouvert dans l'organisme. C'est donc là un résultat intéressant que les mesures avec le compteur cloche ne pouvaient mettre en évidence.

Le compteur à gaz carbonique est donc un ins-

TABLEAU VII

COMPARAISON POUR UN MÊME ÉCHANTILLON DE LA RADIOACTIVITÉ MESURÉE THÉORIQUE AVEC DIFFÉRENTS COMPTEURS

	MOUVEMENT PROPRE (M. P.)	POIDS ATTAQUÉ	ACTIVITÉ MESURÉE (A. M.)	$\frac{\text{A. M.}}{\text{M. P.}}$	ACTIVITÉ CORRIGÉE	ACTIVITÉ DE L'ORGANE	ERREUR SUR LA MESURE
Compteur cloche fenêtre 1,7 mg/cm²	30 c/m	20 mg	3 c/m	0,1	6 c/m	105 c/m	60 %
Compteur CO_2	80 c/m	20 mg	66 c/m	0,82	66	1 155 c/m	8 %
		350 mg	1 155 c/m	14,4	1 155	1 155 c/m	1 %

trument de travail important dans l'étude du métabolisme d'une substance marquée par le ^{14}C. L'installation que nous avons décrite rend son utilisation simple et permet d'effectuer rapidement des séries de mesures.

Manuscrit reçu le 12 avril 1957.

TABLEAU VIII

RÉSULTATS DES MESURES DE LA RADIOACTIVITÉ DE DIFFÉRENTS ÉCHANTILLONS BIOLOGIQUES DE SOURIS MALES INJECTÉS AVEC LA 2-10-DIMÉTHYL-5-6-BENZACRIDINE MARQUÉE PAR LE RADIOCARBONE

Chaque tableau résume deux expériences identiques.

$$R \text{ est défini par le rapport : } \frac{\text{radioactivité 1 mg organe}}{\text{radioactivité 1 mg sang.}}$$

ORGANE	SANG	VÉSICULE BILIAIRE	FOIE	REINS	TESTICULES	RATE	CERVEAU	POUMONS	RESPIRATION
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Fraction d'organe attaquée	48 mg	Total	1/170	1/52	1/10	1/7	1/35	1/13	1/40 de respiration de 2 heures
Activité mesurée c/m	8	6	1	0	0	0	3	1	0
% de la dose		0,01 ± 0,005	0,3 ± 0,3	0	0	0	0,2 ± 0,08	0,02 ± 0,02	0
R		5 ± 3	1 ± 1	0	0	0	1,5 ± 0,8	0,6 ± 0,6	

A) Mesures avec un compteur cloche à fenêtre mince de mica.

ORGANE	SANG	VÉSICULE BILIAIRE	FOIE	REINS	TESTICULES	RATE	CERVEAU	POUMONS	RESPIRATION
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Fraction d'organe attaquée	150 mg	Totalité	1/10	1/2	Totalité	Totalité	1/2	Totalité	1/2 de respiration de 2 heures
Activité mesurée c/m	440	155	430	600	231	266	195	540	
% de la dose		0,02 ± 0,006	0,7 ± 0,08	0,2 ± 0,05	0,04 ± 0,01	0,04 ± 0,003	0,06 ± 0,01	0,1 ± 0,009	13 ± 2
R		6 ± 1	0,7 ± 0,15	1,2 ± 0,2	0,6 ± 0,1	1 ± 0,12	0,4 ± 0,08	0,8 ± 0,16	

B) Mesures avec un compteur à gaz carbonique de 200 cm³ de volume.

BIBLIOGRAPHIE

[1] APELGOT (S.), « β-radiobromo-α. α. β-triphényl-éthylène. Préparation de cet œstrogène artificiel et sa distribution dans l'organisme de la souris femelle. » *Thèse*, Paris, 1957.
[2] LEMMON (R. M.), *Nucleonics*, 1953, **11**, 44.
[3] BROWN (S. C.) et MILLER (W.), *Rev. Sc. Instr.*, 1947, **18**, 496.
[4] MILLER (W.), *Science*, 1947, **105**, 123.
[5] SKIPPER (E.), *J. Biol. Chem.*, 1948, **173**, 371.
[6] EIDINOFF (M. L.), *Anal. Chem.*, 1950, **22**, 529.
[7] EIDINOFF (M. L.), *Anal. Chem.*, 1951, **23**, 632.
[8] HENSON (A. F.), *Brit. J. Appl. Phys.*, 1953, **4**, 217.
[9] GLASCOCK (R. G.), *Atomics*, 1955, **6**, 329.
[10] ENGELKEMEIR (A.), HAMILL (W. H.), INGHRAM (M.) et LIBBY (W.), *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1825.
[11] FELDSTEIN (O.) et BRODA (E.), *Nature*, 1951, **148**, 599.
[12] GRENON (M.) et VIALLARD (R.), *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 310.
[13] PFAFF (A.), *Angew. Chem.*, 1954, **66**, 107.
[14] BERNSTEIN (W.) et BALLENTINE (R.), *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 158.
[15] VAN SLYKE (D.), STEEL (R.) et PLAZIN (J.), *J. Biol. Chem.*, 1951, **192**, 769.
[16] BUCHANAN (D. L.) et NAKAO (A.), *J. Amer. Chem. Soc.*, 1952, **74**, 2389.
[17] LABEYRIE (J.), *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 146.
[18] DELIBRIAS (G.), *J. Inorg. and Nuclear Chemistry*, 1955, **1**, n° 3, 238.
[19] ROHRINGER (G.) et BRODA (E.), *Z. Naturforsch.*, 1953, **8b**, 159.
[20] BRODA (E.) et SVERAK (L.), *Nature*, 1954, **173**, 676.
[21] BRODA (E.) et ROHRINGER (G.), *Z. Elektrochem. Ber., Bunsenges. Phys. Chem.*, 1954, **58**, 634.
[22] BRADLEY (J. E. S.), HOLLOWAY (R. C.) et MCFARLANE (A. S.), *Biochem. J.*, 1954, **57**, 199.
[23] DONTCHEFF (L.), *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 1953, **35**, 685.
[24] NICLOUX (M.), *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 1927, **9**, 642.
[25] VAN SLYKE (D. D.), PLAZIN (J.) et WEISIGER (J. R.), *J. Biol. Chem.*, 1951, **191**, 299.
[26] APELGOT (S.) et MARS (S.), *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 1953, **35**, 691.
[27] CALVIN (M.), HEIDELBERGER (G.), REID (J. C.), TALBERT (B. F.) et YANKWICH (P. E.), Isotopic Carbon, New-York, 1949.
[28] DAUDEL (P.), CHEUTIN (A.), FLON (M.), BUU-HOI (N. P.) et MUXART (R.), *Bull. Soc. Chim.*, 1952, **1** et **2**, 86.
[29] APELGOT (S.), ROUMEGOUS (A.), PATUREAU (G.) et MOUSTACCHI (E.), *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 1955, **37**, 136.
[30] CLAYCOMB (C. K.), HUTCHINS (T. T.) et VAN BRUGGEN (J. T.), *Nucleonics*, 1950, **7**, n° 3, 38.

LA DÉTERMINATION DES SURFACES ET DES INTERFACES SPÉCIFIQUES PAR DIFFUSION CENTRALE DU RAYONNEMENT X

I. FONDEMENTS THÉORIQUES

Par J. L. SOULÉ,
Centre d'Études et Recherches des Charbonnages de France — Verneuil-en-Halatte (Oise).

L'application systématique de la diffusion centrale du rayonnement X à l'étude des structures non-périodiques s'est développée initialement à propos des solutions de grosses molécules, c'est-à-dire de structures à l'échelle des dizaines d'angströms. Au cours de ces dernières années, le champ d'exploration a été étendu à l'échelle des centaines et même des milliers d'angströms, par exemple dans les examens de catalyseurs. Au lieu de la diffusion faible et relativement étalée que l'on observait dans les premières expériences, s'est manifestée une diffusion beaucoup plus intense mais plus serrée. Pour interpréter ces nouveaux résultats, il a fallu abandonner le calcul d'un « rayon de giration », fondé sur la zone la plus intense (c'est-à-dire la plus centrale) de la tache de diffusion, et chercher à exploiter les régions extrêmes du diagramme. La formule de Porod [4] reliant l'intensité diffusée dans cette zone à la surface ou l'interface spécifique de la substance analysée, est venue à point pour renforcer l'intérêt des recherches dans ce domaine.

L'objet de cet article est essentiellement de présenter des études théoriques effectuées pour contribuer à la mise au point de méthodes fondées sur la formule de Porod, l'objectif primordial étant de parvenir à une mesure absolue des surfaces et interfaces spécifiques, aussi indépendante que possible de mesures extrinsèques. Il nous a paru utile toutefois de chercher au préalable à regrouper de façon cohérente les progrès les plus récents de la théorie générale [1], [4], [5], [6].

Les différentes modalités d'application pratique seront discutées de façon détaillée sur des exemples dans un article faisant suite à celui-ci. Quelques résultats concrets obtenus au CERCHAR par S. Durif ont d'ailleurs déjà été présentés [7], et comparés aux résultats fournis par d'autres procédés physico-chimiques.

A. Rappel de théorie générale.

1. **Formule fondamentale.** — Lorsqu'un faisceau de rayons X (que nous supposerons monochromatique) traverse un objet quelconque, une fraction de l'énergie rayonnante est absorbée, et le reste plus ou moins dévié par interaction avec les corpuscules matériels (en fait les électrons). Considérons le cas d'une substance amorphe hétérogène, c'est-à-dire dont la densité électronique fluctue irrégulièrement d'une zone à une autre. On pourra étudier le phénomène par référence au même échantillon supposé homogénéisé par uniformisation de la densité, mais sans modification des configurations intra-atomiques. L'absorption serait la même et les interactions successives auraient deux effets : d'une part, une modification apparente de la célérité des ondes (donc essentiellement une réfraction à travers l'échantillon), d'autre part, une légère diffusion dans toutes les directions résultant de la structure corpusculaire chaotique du milieu diffusant (diffusion renforcée toutefois dans les directions voisines de l'incidente par interférence entre les sources que constituent les électrons d'un même atome). Vis-à-vis du phénomène réel avec la substance hétérogène, le premier effet peut être négligé (la réfraction des rayons X est très faible) et le second se traduira par un fond continu relativement uniforme. Quant à l'hétérogénéité, elle entraînera la déviation d'une fraction du rayonnement par suite des interférences entre les ondes supplémentaires ou manquantes diffusées par les régions à densité renforcée ou affaiblie. C'est cet effet qui constitue la diffusion centrale proprement dite [1].

En partant de la formule de Thomson pour la diffusion par un électron, il est bien connu qu'on aboutit par le calcul des interférences à représenter la diffusion centrale par la formule :

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}) = 7{,}90.10^{-26} \frac{\mathcal{J}_0}{L^2} \int e^{-2\pi i \mathbf{s}.\mathbf{r}} P(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \qquad (1)$$

qui doit être comprise comme suit :

$\mathcal{J}_0$ est l'intensité du rayonnement primaire dans l'échantillon, $\mathcal{J}$ (s) l'intensité du rayonnement

(1) Par comparaison avec les exposés les plus récents de la théorie (voir par exemple [3]), on notera que nous attirons ici l'attention sur le point suivant : le terme « non observable » de l'intensité diffusée, lié à la forme du volume irradié, suit en fait les lois de la réfraction et non celles de la diffusion simple ; un calcul correct doit donc suivre la ligne que nous indiquons.

secondaire diffusé à une distance suffisamment grande L (exprimée en cm), selon la direction caractérisée par le vecteur unité $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \lambda.\mathbf{s}$ ($\mathbf{U}_0$: vecteur unité porté par la direction incidente Oz, λ : longueur d'onde en Å ; $\mathbf{s}$ est en angström^{-1}).

V est le volume irradié (en angströms-cubes). $P(\mathbf{r})$ est la fonction de corrélation de la densité électronique ρ (nombre d'électrons par angström-cube), c'est-à-dire si :

$$\bar{\rho} = \text{moy. } [\rho(\mathbf{x})]$$

$$P(\mathbf{r}) = \text{moy. } [\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}]\,[\rho(\mathbf{x} - \mathbf{r}) - \bar{\rho}] \qquad (2)$$

la moyenne étant prise sur tous les points $\mathbf{x}$ de l'échantillon, pour chaque écart vectoriel $\mathbf{r}$. L'intégrale dans la formule (1) porte sur tout l'espace à 3 dimensions (l'hypothèse étant faite une fois pour toutes que $P(\mathbf{r})$ est absolument intégrable dans cet espace, donc tend assez rapidement vers zéro quand r croît indéfiniment).

On notera que la structure n'intervient que dans l'intégrale ; il sera commode de considérer celle-ci comme une valeur normée de l'intensité (pouvoir diffusant d'un angström-cube dans la direction $\mathbf{s}$, compté en nombre d'électrons indépendants équivalents) :

$$I(\mathbf{s}) = \int e^{-2\pi i \mathbf{s}.\mathbf{r}}\, P(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \qquad (3)$$

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}) = 7{,}90.10^{-26}\, (\mathcal{I}_0/L^2)\; VI(\mathbf{s}).$$

Pour les atomes légers, le nombre d'électrons est la moitié du nombre atomique. Utilisant le nombre d'Avogadro, on peut passer de la masse spécifique C G S μ à la densité électronique ρ par la formule :

$$\rho = \frac{1}{2}\, 6{,}02.10^{23}\, (10^{-8})^3\, \mu = 0{,}301\ \mu.$$

La fonction de corrélation calculée sur μ, $P_\mu(\mathbf{r})$, fournit donc :

$$P(\mathbf{r}) = 0{,}301^2 \quad P_\mu(\mathbf{r}).$$

2. **Formules dérivées.** — Selon (3), $I(\mathbf{s})$ apparaît comme la transformée de Fourier à 3 dimensions de $P(\mathbf{r})$. Pour utiliser le théorème de réciprocité, il faut faire intervenir la valeur de $I(\mathbf{s})$ pour tous les points $\mathbf{s}$ de l'espace réciproque. Cet ensemble de valeurs n'est pas connu par une seule expérience, mais de toutes façons nous n'envisagerons dans toute la suite que les structures isotropes, telles que $P(\mathbf{r})$ et par suite $I(\mathbf{s})$ ont la symétrie de révolution : $P(\mathbf{r})$ ne dépend que de $|\mathbf{r}| = r$ et $I(\mathbf{s})$ de $|\mathbf{s}| = s$.

En diffusion centrale $\mathcal{I}(\mathbf{s})$ n'est appréciable que pour des valeurs λs petites devant l'unité et par conséquent pour des vecteurs $\mathbf{s}$ sensiblement orthogonaux à $\mathbf{U}_0$. L'espace réciproque est donc exploré pratiquement dans le plan xOy orthogonal à $\mathbf{U}_0$. Décomposons alors $\mathbf{r}$ selon sa composante $\mathbf{t}$ dans ce plan et la composante $\mathbf{z}$ selon Oz, et définissons une fonction de corrélation projetée, par la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{t} + \mathbf{z})\, d\mathbf{z} = Q(\mathbf{t}). \qquad (4)$$

De même, nous décomposerons $\mathbf{s}$ en $\mathbf{h} + \mathbf{k}$ ($\mathbf{h}$ dans xOy, $\mathbf{k}$ selon Oz), et nous préciserons que (3) est relative en fait au cas où $\mathbf{k} = 0$, donc :

$$I(\mathbf{h}) = \int e^{-2\pi i \mathbf{h}.\mathbf{r}}\, P(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int e^{-2\pi i \mathbf{h}.\mathbf{t}}\, P(\mathbf{t} + \mathbf{z})\, d\mathbf{t}\, d\mathbf{z}. \qquad (3\ bis)$$

Grâce à l'hypothèse d'intégrabilité absolue de la fonction de corrélation, on peut dans l'expression précédente intégrer d'abord par rapport à $\mathbf{z}$, ce qui donne immédiatement (dans l'espace à deux dimensions xOy) :

$$I(\mathbf{h}) = \int e^{-2\pi i \mathbf{h}.\mathbf{t}}\, Q(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \qquad (5)$$

Les formules réciproques (à 3 et 2 dimensions) de (3) et (5) fournissent :

$$P(\mathbf{r}) = \int e^{2\pi i \mathbf{r}.\mathbf{s}}\, I(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \qquad (6)$$

$$Q(\mathbf{t}) = \int e^{2\pi i \mathbf{t}.\mathbf{h}}\, I(\mathbf{h})\, d\mathbf{h}. \qquad (7)$$

Par raison de symétrie on est conduit à définir une intensité normée projetée, par la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\mathbf{h} + \mathbf{k})\, d\mathbf{k} = J(\mathbf{h}). \qquad (8)$$

Par un raisonnement analogue au précédent, la formule (6) conduit à :

$$P(\mathbf{t}) = \int e^{2\pi i \mathbf{t}.\mathbf{h}}\, J(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} \qquad (9)$$

et par réciprocité :

$$J(\mathbf{h}) = \int e^{2\pi i \mathbf{h}.\mathbf{t}}\, P(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \qquad (10)$$

Enfin, si dans la formule (7) on décompose $\mathbf{h}$ selon les composantes $\mathbf{l}$ et $\mathbf{m}$ parallèle et perpendiculaire à $\mathbf{t}$, on aboutira de même à :

$$Q(\mathbf{t}) = \int e^{2\pi i \mathbf{t}.\mathbf{l}}\, J(\mathbf{l})\, d\mathbf{l} \text{ avec } J(\mathbf{l}) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\mathbf{l} + \mathbf{m})\, d\mathbf{m}. \qquad (11)$$

La projection qui définit $J(\mathbf{l})$ est effectuée cette fois dans le plan xOy et non plus perpendiculairement à ce plan comme dans (8), mais dans le cas d'isotropie cela revient au même. L'intégration dans la formule (11) est à une dimension ; cette formule admet une réciproque.

Nous allons récrire toutes les formules dérivées obtenues, dans l'hypothèse d'isotropie. Q et J ont alors la symétrie circulaire et ne dépendent que de $|\mathbf{t}| = t$ et $|\mathbf{h}| = h$. On sait que les intégrales de Fourier à 3 ou 2 dimensions se ramènent dans ce cas à des intégrales de Hankel à une dimension, par

l'emploi de coordonnées polaires. On a par exemple:

$$\int e^{-2\pi i \mathbf{s}.\mathbf{r}} P(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_0^\infty \int^\pi e^{-2\pi i s r \cos\omega} P(r)\, 2\pi \sin\omega\, d\omega\, r^2\, dr = 2\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi sr)}{s} rP(r)\, dr$$

$$\int e^{-2\pi i \mathbf{h}.\mathbf{t}} Q(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i h t \cos\omega} Q(t)\, d\omega\, t\, dt = \int_0^\infty 2\pi\, J_0(2\pi ht)\, tQ(t)\, dt$$

en utilisant la définition de la fonction de Bessel d'ordre zéro :

$$2\pi\, J_0(u) = \int_0^{2\pi} e^{-iu\cos\omega}\, d\omega.$$

Nous aurons ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\sqrt{t^2+z^2})\, dz = Q(t) \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\sqrt{h^2+k^2})\, dk = J(h) \quad (13)$$

$$sI(s) = \int_0^\infty 2\sin(2\pi sr)\, rP(r)\, dr \quad (14)$$

$$rP(r) = \int_0^\infty 2\sin(2\pi rs)\, sI(s)\, ds \quad (15)$$

$$I(s) = \int_0^\infty 2\pi\, J_0(2\pi st)\, tQ(t)\, dt \quad (16)$$

$$Q(t) = \int_0^\infty 2\pi\, J_0(2\pi ts)\, sI(s)\, ds \quad (17)$$

$$J(h) = \int_0^\infty 2\pi\, J_0(2\pi hr)\, rP(r)\, dr \quad (18)$$

$$P(r) = \int_0^\infty 2\pi\, J_0(2\pi rh)\, hJ(h)\, dh \quad (19)$$

$$J(h) = \int_0^\infty 2\cos(2\pi ht)\, Q(t)\, dt \quad (20)$$

$$Q(t) = \int_0^\infty 2\cos(2\pi th)\, J(h)\, dh. \quad (21)$$

Pour compléter ce tableau permettant de passer de chacune des 4 fonctions P, Q, I, J à chacune des 3 autres, il faut encore écrire les formules d'inversion :

$$P(r) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q'(\sqrt{r^2+z^2})\, dz}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad (22)$$

$$I(s) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{J'(\sqrt{s^2+k^2})\, dk}{\sqrt{s^2+k^2}}. \quad (23)$$

Ces formules se démontrent dans l'hypothèse où les expressions écrites avec les dérivées Q' et J' existent et sont absolument intégrables ; on peut écrire des formules légèrement plus compliquées sans cette restriction.

S'il n'y a pas isotropie, on peut toujours « symétriser » au préalable les fonctions $P(\mathbf{r})$ et $I(\mathbf{s})$ en prenant les moyennes des fonctions réelles sur les sphères de rayons r et s.

Enfin, on pourrait faire intervenir les projections doubles de $P(\mathbf{r})$ et $I(\mathbf{s})$, qui permettent en particulier une démonstration simple des formules (22) et (23).

3. Intervention des caractéristiques expérimentales. — Pour l'utilisation effective des formules, il est nécessaire de relier explicitement les répartitions dans le plan d'enregistrement de l'intensité du faisceau non dévié d'une part, de l'intensité du faisceau diffusé d'autre part. L'hypothèse de base est que tous les rayons sont suffisamment voisins de l'orthogonalité à ce plan pour que l'angle de déviation reste proportionnel à la distance des points d'impact M_0 et M des rayons non dévié et dévié ; autrement dit

$$\lambda\mathbf{s} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \frac{1}{L}\overrightarrow{M_0 M} \quad \text{soit} \quad \mathbf{s} = \frac{1}{\lambda L}\overrightarrow{M_0 M}.$$

Si on définit une échelle convenable dans le plan d'enregistrement pour repérer les points d'impact par le vecteur $\mathbf{u}$ (soit une unité en angström^{-1} pour $L\lambda$ cm), on aura : $\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$.

Par ailleurs $\mathcal{I}_0$ n'est pas connue dans l'échantillon, mais on connaît sa répartition $\mathcal{I}'_0(\mathbf{u}_0)$ dans le plan d'enregistrement (le faisceau « direct » étant peu modifié par la traversée de l'échantillon s'il diffuse peu) ; ce qui se conserve, c'est le flux, c'est-à-dire le produit de l'intensité par la section. Si cette dernière est mesurée en (Angström^{-1})^2, il faut corriger par le facteur $L^2\lambda^2$. En tenant compte de ce que V dans la formule (1) est en (Å)^3 et en appelant E l'épaisseur en cm de l'échantillon et $\mathcal{A}$ l'aire (infiniment petite) de la trace du faisceau direct, on aboutit à la formule :

$$\mathcal{I}(\mathbf{s}) = 0{,}079\, E\lambda^2\, \mathcal{I}'_0\, \mathcal{A}\, I(\mathbf{s}).$$

Si le faisceau direct n'est pas focalisé, il faut remplacer $\mathcal{I}'_0\mathcal{A}$ par une somme d'éléments $\mathcal{I}'_0(\mathbf{u}_0)\, d\mathbf{u}_0$ et par intégration dans le plan on obtiendra :

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) = 0{,}079\, E\lambda^2 \int \mathcal{I}'_0(\mathbf{u}_0)\, I(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\, d\mathbf{u}_0. \quad (24)$$

En appliquant dans le plan le théorème classique sur la transformée de Fourier d'un produit de composition :

$$\int e^{2\pi i \mathbf{t}.\mathbf{u}}\, \mathcal{I}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = 0{,}079\, E\lambda^2 \int e^{2\pi i \mathbf{t}.\mathbf{u}_0}\, \mathcal{I}'_0(\mathbf{u}_0)\, d\mathbf{u}_0 . \int e^{2\pi i \mathbf{t}.\mathbf{h}} I(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} \quad (25)$$

soit

$$\mathcal{L}(\mathbf{t}) = 0{,}079\, E\lambda^2\, \mathcal{L}_0(\mathbf{t}) . Q(\mathbf{t})$$

où $Q(\mathbf{t})$ a la signification de (7).

Cette formule est particulièrement adaptée au cas où $\mathcal{I}'_0$ et I ont la symétrie circulaire. Un autre cas de grande importance pratique est celui où le faisceau incident est linéaire : la répartition de $\mathcal{I}'_0$ est définie par un profil $\mathcal{I}'_0$ (x) indépendant de y sur une grande longueur. Posons $\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. La formule (24) devient :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 0{,}079\, E\lambda^2 \iint \mathcal{I}'_0(\mathbf{x}_0)\,.\,I(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_0\,\mathrm{d}\mathbf{y}_0.$$

En intégrant d'abord par rapport à $\mathbf{y}_0$, on fait intervenir la fonction $\int I(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)\,\mathrm{d}\mathbf{y}_0$ qui, dans l'hypothèse d'isotropie, est égale à $J(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)$. Donc dans ce cas :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 0{,}079\, E\lambda^2 \int \mathcal{I}'_0(\mathbf{x}_0)\,.\,J(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_0$$

$\mathcal{I}$ est manifestement indépendant de $\mathbf{y}$ et on peut écrire l'égalité :

$$\mathcal{I}(x) = 0{,}079\, E\lambda^2 \int \mathcal{I}'_0(x_0)\,.\,J(x-x_0)\,\mathrm{d}x_0. \tag{26}$$

Par transformation de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t x}\,\mathcal{I}(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}079\, E\lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t x_0}\,\mathcal{I}'_0(x_0)\,\mathrm{d}x_0\,.\,Q(t). \tag{27}$$

Si le profil $\mathcal{I}'_0(x)$ est relativement serré autour de $x = 0$, on peut approcher la formule (26) par :

$$\mathcal{I}(x) = 0{,}079\, E\lambda^2 \int \mathcal{I}'_0(x_0)\,\mathrm{d}x_0\,.\,J(x). \tag{28}$$

Rappelons que si $P(r)$ est définie à partir des fluctuations de masses spécifiques il faut remplacer le coefficient numérique 0,0790 par

$$0{,}0790 \times 0{,}301^2 = 0{,}00716.$$

Nous n'avons pas considéré l'absorption qui peut n'être pas négligeable. Mais son effet sera éliminé automatiquement par le fait qu'elle joue de la même façon sur le faisceau direct et le faisceau diffusé.

Enfin, si on se reporte au paragraphe 1, on voit que $\mathcal{I}(x)$ est l'intensité diffusée proprement dite, déduction faite du fond continu.

4. **Grandeurs typiques.** — La diffusion centrale renseigne donc en définitive sur la fonction de corrélation $P(r)$ (ou, ce qui est équivalent, sur sa projection Q). Les conditions expérimentales ne permettant pas toujours de connaître parfaitement dans sa totalité la fonction $I(s)$ ou $J(h)$, il pourra être prudent, au lieu d'effectuer globalement la transformation de Fourier, de se contenter de déterminer quelques grandeurs typiques, tout en les reliant à $P(r)$. Dans ce paragraphe, nous considérons les principales de ces grandeurs, existant dans le cas général.

Si l'on fait $\mathbf{s} = 0$ dans les formules (3), (16) et (23) :

$$I(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{J'(h)\,\mathrm{d}h}{h} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(0)-J(h)}{h^2}\,\mathrm{d}h$$
$$= \int_0^\infty 4\pi r^2 P(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty 2\pi t Q(t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

En reprenant la démonstration de la formule fondamentale, on peut montrer que $V_0\, I(0)$ est la variance du nombre d'électrons contenus dans un volume V_0 quand celui-ci est suffisamment grand.

Si l'on fait $h = 0$ dans les formules (13), (18) et (20) :

$$2\int_0^{+\infty} I(s)\,\mathrm{d}s = J(0) = \int_0^{+\infty} 2\pi r P(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty 2Q(t)\,\mathrm{d}t. \tag{30}$$

On peut montrer de même que $S_0\, J(0)$ est la variance de l'intégrale de la densité électronique sur une aire plane S_0 suffisamment grande.

Faisons $t = 0$ dans (17), (21) et (12) :

$$\int_0^\infty 2\pi s I(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty 2J(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^\infty 2P(r)\,\mathrm{d}r = Q(0) \tag{31}$$

$L_0\, Q(0)$ est la variance de l'intégrale de la densité électronique sur un segment L_0 suffisamment long. D'autre part le flux total diffusé dans toutes les directions est :

$$\Phi = L^2 \int \mathcal{I}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{U} = L^2\lambda^2 \int \mathcal{I}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}$$
$$= L^2\lambda^2\, 7{,}90\; 10^{-26}\,\frac{\mathcal{I}_0}{L^2}\, V \int I(\mathbf{h})\,\mathrm{d}\mathbf{h}$$

$$\Phi = 0{,}079\,\mathcal{I}_0\,\lambda^2\, V_{\mathrm{cm}^3}\, Q(0)$$

Ainsi le coefficient volumétrique de diffusion d (fraction de flux diffusée par centimètre d'épaisseur de l'échantillon traversé) est :

$$d = 0{,}079\,\lambda^2\, Q(0). \tag{32}$$

Faisons enfin $r = 0$ dans (6), (19) et (22) :

$$\int_0^\infty 4\pi s^2 I(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty 2\pi h J(h)\,\mathrm{d}h = P(0)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q'(t)\,\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q(0)-Q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{33}$$

Cette formule fait apparaître $P(0)$ qui est la variance des valeurs prises par la densité électronique.

La correspondance de Fourier permet d'établir d'autres formules, soit en prenant des puissances fractionnaires, soit, moyennant certaines restric-

tions analytiques, en prenant des puissances négatives. Par exemple :

$$\lim_{s\to 0} \frac{I(0) - I(s)}{s^2} = \frac{8\pi^3}{3}\int_0^{+\infty} r^4 P(r)\, dr$$

si cette intégrale converge.

$$\lim_{h\to 0} \frac{J(0) - J(h)}{h^2} = 2\pi^3 \int_0^{+\infty} r^3 P(r)\, dr$$

si cette intégrale converge.

L'exploitation de toutes ces formules dépendra d'une part, de la possibilité de déterminer $I(s)$ ou $J(h)$ en valeur absolue (ce qui exige de pouvoir rapporter l'intensité diffusée à l'intensité non déviée) ou seulement en valeur relative, d'autre part, des renseignements extrinsèques sur la structure dont on pourra disposer (par exemple, connaissance de la variance $P(0)$).

5. **Diffusion multiple** [6]. — Le rayonnement secondaire diffusé par les hétérogénéités en densité vient en fait modifier le rayonnement primaire à l'intérieur même de l'échantillon ; il donne donc lieu en principe à d'autres diffusions en série. La théorie précédente n'est applicable que lorsque cette diffusion multiple ne joue que sur une fraction relativement faible du flux diffusé.

A une distance des sources de diffusion suffisamment grande devant l'échelle d'hétérogénéité, l'intensité du rayonnement secondaire est donnée par son expression « à l'infini » et sa phase est indépendante de celle du rayonnement primaire au même point. Dans le flux qui traverse chaque plan de l'échantillon on peut alors considérer séparément le flux primaire et le flux secondaire. D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, après une épaisseur e, la fraction $d.e$ du flux primaire est transformée en flux secondaire (d étant le coefficient de diffusion). Ceci se reproduisant de proche en proche à travers chaque couche, il est manifeste que la fraction non diffusée après l'épaisseur E sera en définitive $\exp[-\mathrm{d}E]$. (Nous ne considérons pas l'absorption, qui joue identiquement sur le flux primaire et le flux diffusé ; de plus la diffusion incohérente sera fictivement assimilée à l'absorption.)

Le flux secondaire, étant de même nature que le flux primaire (et sensiblement de même direction de propagation), sera diffusé selon les mêmes lois : d'une part la fraction qui passera en flux tertiaire sur une épaisseur d sera $d.e$, d'autre part les nouvelles déviations angulaires seront indépendantes des premières déviations de sorte que la répartition globale sera donnée par un produit de composition analogue à celui de la formule (24), en remplaçant $\mathcal{J}'_0$ par $\mathcal{J}$ sous l'intégrale. On pourra déterminer de façon synthétique l'évolution de proche en proche de tout le faisceau en procédant comme suit.

Soit $\mathcal{J}_T(\mathbf{u}, E)$ la répartition en direction de tout le flux (flux primaire compris) après la traversée de l'épaisseur E. Cherchons ce qu'elle devient après l'épaisseur supplémentaire très petite e. En appliquant (24) et en ajoutant le flux non dévié sur e, il vient :

$$\mathcal{J}_T(\mathbf{u}, E + e) = 0{,}079\,\lambda^2 e \int \mathcal{J}_T(\mathbf{u}_0, E)\, I(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\, d\mathbf{u}_0 + (1 - de)\, \mathcal{J}_T(\mathbf{u}, E).$$

Pour intégrer l'effet des couches successives, nous raisonnerons sur la transformée de Fourier de cette équation :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T(\mathbf{t}, E + e) &= 0{,}079\,\lambda^2 e\, \mathcal{L}_T(\mathbf{t}, E)\,.\,Q(\mathbf{t}) + (1 - de)\, \mathcal{L}_T(\mathbf{t}, E)\\ &= \mathcal{L}_T(\mathbf{t}, E) \left\{1 - de\left[1 - \frac{Q(\mathbf{t})}{Q(0)}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Cette équation, considérée comme une équation différentielle en E (élément différentiel e) s'intègre immédiatement pour donner :

$$\mathcal{L}_T(\mathbf{t}, E) = \mathcal{L}_0(\mathbf{t})\,.\exp\left\{-\,\mathrm{d}E\left[1 - \frac{Q(\mathbf{t})}{Q(0)}\right]\right\}. \quad (34)$$

Dans cette formule $\mathcal{L}_0(\mathbf{t})$ est la transformée de Fourier de la répartition en intensité qu'aurait dans le plan d'enregistrement le faisceau de rayons X s'il avait subi à la traversée de l'échantillon la même absorption, mais pas de diffusion, c'est-à-dire s'il avait traversé l'échantillon homogénéisé ; $\mathcal{L}_T(\mathbf{t}, E)$ est la transformée de la répartition réelle du faisceau total (dévié et non dévié) ayant subi la diffusion multiple.

Lorsque $t \to \infty$, l'exponentielle tend vers $\exp(-\mathrm{d}E)$, quantité qui correspond au flux non dévié. En mettant en évidence celui-ci et en revenant à l'intensité, on pourra écrire :

$$\mathcal{J}_T(\mathbf{u}, E) = \mathcal{J}'_0(\mathbf{u}) \exp(-\mathrm{d}E) + 0{,}079\, E\lambda^2 \int \mathcal{J}'_0(\mathbf{u}_0)\, I(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, E)\, d\mathbf{u}_0$$

où

$$I(\mathbf{h}, E) = \int e^{-2\pi i \mathbf{h}.\mathbf{t}}\, Q(\mathbf{t}, E)\, d\mathbf{t}$$

et

$$Q(\mathbf{t}, E) = \frac{Q(0)}{\mathrm{d}E} \exp(-\mathrm{d}E)\,.\left\{\exp\left[\mathrm{d}E\frac{Q(\mathbf{t})}{Q(0)}\right] - 1\right\}. \quad (34\ bis)$$

Puisque $I(\mathbf{h})$ est positif, la formule (7) montre que $Q(\mathbf{t}) < Q(0)$ pour tout $\mathbf{t}$; donc l'exposant dans la formule (34 *bis*) reste borné par $\mathrm{d}E$, et si $\mathrm{d}E$ tend vers zéro, $Q(\mathbf{t}, E)$ tend uniformément vers $Q(\mathbf{t})$. La formule 34 *bis* donne la quantité qui doit être substituée à $Q(t)$ dans les diverses formules (16), (17), (20), (21), puis (25) et (27), lorsqu'on tient compte de la diffusion multiple.

$1/d$ est la longueur moyenne (en cm) du trajet effectué par le rayonnement dans l'échantillon entre deux diffusions successives. La théorie qui vient d'être exposée est donc en principe valable

lorsque $1/d$ est grand devant l'échelle d'hétérogénéité $\bar{r}$(Å) qu'on peut définir par exemple par :

$$Q(0) = \int_0^\infty 2P(\mathbf{r})\, dr = \bar{r}P(0).$$

On doit donc avoir :

$$\frac{10^8}{0{,}079\,\lambda^2 Q(0)} \gg \bar{r} \qquad 0{,}079\,\lambda^2 \bar{r}^2 P(0) \ll 10^8.$$

Puisque $P(0)$ est la variance σ^2 de la densité électronique, ceci revient à :

$$\bar{r} \ll \frac{10^4}{\sqrt{0{,}079}\,\lambda\sigma}, \quad \text{soit quelques microns en général.}$$

6. **Réfraction multiple.** — Si l'échelle d'hétérogénéité est grande, la théorie doit être modifiée parce que la diffusion multiple opère sur des points successifs très rapprochés. Il y a toute une zone de transition ; puis, lorsque l'échelle atteint quelques dizaines de microns, on peut considérer que l'optique géométrique de Fresnel est applicable : la propagation se fait selon les lois de la réflexion et de la réfraction. Il s'agit alors d'un milieu à indice de réfraction variable irrégulièrement (mais très faiblement) d'un point à un autre. Nous nous contenterons de signaler le problème, qui nécessiterait un examen approfondi (distinguant certainement deux cas : une fluctuation continue de l'indice de réfraction, et des discontinuités donnant lieu en outre à réflexion et diffusion de bord).

B. Structures comportant plusieurs phases.

Dans le cadre de la théorie générale, la fonction de covariance $P(r)$ et les grandeurs typiques qu'on peut lui associer ne caractérisent la structure que d'une façon assez abstraite. Si l'on possède des renseignements extrinsèques sur la substance étudiée, on pourra imaginer un modèle plus ou moins restrictif, puis en principe vérifier que la fonction $P(r)$ trouvée est compatible avec ce modèle, et enfin rattacher les grandeurs typiques générales ou particulières à des caractéristiques plus concrètes.

Sans nous étendre sur la notion de modèle, nous indiquerons toutefois que c'est ici une notion essentiellement probabiliste : la fonction qui représente la densité électronique en chaque point est astreinte à appartenir à une certaine classe de fonctions, et cette classe est « probabilisée » c'est-à-dire que l'on fixe les probabilités pour que telles opérations définies sur la fonction fournissent telles valeurs [2]. Par suite la théorie des modèles relève au point de vue mathématique de la théorie des « fonctions aléatoires » [8]. L'étude des fonctions aléatoires se fait en partant de deux points de vue. Elle peut procéder d'une définition constructive, ne laissant jouer le hasard que sur certains paramètres ; l'étude des modèles du type « système de particules » relève de ce point de vue : le hasard est alors censé jouer sur la position et l'orientation des particules, et la valeur des paramètres définissant chaque particule dans un ensemble.

L'autre voie consiste à partir d'une définition strictement descriptive. Il s'agit alors d'envisager un système cohérent et complet de propriétés statistiques. La loi de covariance fait partie de ce système ; mais il y a en outre la loi de probabilité complète des valeurs que peut prendre la densité en un point, la loi de probabilité à deux variables du couple de valeurs que peut prendre la densité en deux points donnés, la loi pour 3 points, etc... Ces lois ne sont pas quelconques, chacune étant en quelque sorte une précision apportée à la précédente. L'ensemble des lois pour un point, deux points, trois points, etc... détermine les lois de la plupart des grandeurs statistiques intéressantes, et de toutes façons on montre qu'il est toujours possible de compléter la « probabilisation » de la fonction aléatoire considérée. Nous appellerons l'ensemble de ces lois la loi ponctuelle.

Selon cette voie d'attaque, un problème qui peut se poser est le suivant : on se donne une partie de la loi ponctuelle ; est-il possible et de quelles façons de prolonger complètement cette loi ? Dans cet ordre d'idées, un problème a été parfaitement résolu : on sait caractériser toutes les fonctions $P(r)$ qui sont des fonctions de covariance (par exemple par le fait que leur transformée de Fourier $I(s)$ est partout positive : c'est une condition nécessaire et suffisante, moyennant une légère généralisation qui pourra être négligée ici).

Cette voie est celle qui convient pour les modèles généraux, peu restrictifs : on les définira directement par une certaine restriction sur la loi ponctuelle et on étudiera ses répercussions sur les fonctions $P(r)$ et $I(s)$. Dans ce qui suit, nous insisterons particulièrement sur les modèles généraux adaptés aux structures comportant plusieurs phases (soluté et solvant, particules et interstices, solide compact et pores, etc...). On voit immédiatement qu'une définition générale de telles structures pourra consister à fixer une loi de probabilité particulière pour les valeurs prises en un point par la densité électronique : ces valeurs se groupant autour des valeurs moyennes dans chaque phase.

1. **Deux phases homogènes.** — C'est le cas le plus simple et le plus important. La loi des valeurs prises en un point par la densité électronique est du type :

$$\text{Prob. } [\rho = \rho_1] = p \quad \text{Prob. } [\rho = \rho_2] = q \quad p + q = 1. \qquad (35)$$

(2) Il s'agit des valeurs possibles lorsqu'on se déplace d'un point à un autre dans l'espace, ou plus généralement des valeurs possibles lorsqu'on passe d'un échantillon particulier à un autre échantillon macroscopiquement équivalent.

On a :

$$\bar{\rho} = p\rho_1 + q\rho_2 \quad P(0) = \text{moy. } [\rho - \bar{\rho}]^2 = pq(\rho_1 - \rho_2)^2.$$

Les propriétés des fonctions aléatoires soumises à cette restriction peuvent manifestement s'étudier en particularisant ρ_1 et ρ_2. Par commodité, nous prendrons $\rho_1 = +1$ et $\rho_2 = -1$.

La loi des valeurs simultanées en deux points A et B sera entièrement fixée par

$$\text{Prob. } [\rho(A) = +1, \quad \rho(B) = -1] = \varphi(A, B)$$

car on aura nécessairement :

$$\text{Prob. } [\rho(A) = +1, \quad \rho(B) = +1] = p - \varphi(A, B)$$

$$\text{Prob. } [\rho(A) = -1, \quad \rho(B) = -1] = q - \varphi(A, B)$$

et enfin

$$\text{Prob. } [\rho(A) = -1, \quad \rho(B) = +1] = \varphi(A, B)$$

ce qui se condense sous la forme :

$$\text{Prob. } [\rho(A) = a, \quad \rho(B) = b] = -ab\,\varphi(A, B) + N(a, b) \tag{36}$$

où par convention

$$N(+1, +1) = p \quad N(-1, -1) = q$$

et $N = 0$ autrement.

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie se traduit dans le fait que $\varphi(A, B)$ ne dépend que de la distance AB.

On calcule aisément :

$$P(r = AB) = 4pq - 4\varphi(A, B) \tag{37}$$

et si on revient à ρ_1 et ρ_2 quelconques :

$$P(r = AB) = (\rho_1 - \rho_2)^2 \, [pq - \varphi(A, B)] \tag{37 bis}$$

φ ne peut être quelconque, mais doit fournir 4 valeurs positives pour les probabilités écrites, ce qui impose :

$$0 < \varphi < p \quad \text{et} \quad 0 < \varphi < q. \tag{38}$$

On peut montrer aisément que la considération de la loi des valeurs simultanées en 3 points introduit une seule grandeur supplémentaire (de même ensuite pour 4, etc...) puis vérifier qu'on peut écrire cette loi sous la forme :

$$\text{Prob. } [\rho(A) = a, \quad \rho(B) = b, \quad \rho(C) = c]$$
$$= -\frac{1}{2}\,[ab\,\varphi(A,B) + ac\,\varphi(A, C) + bc\,\varphi(B, C)]$$
$$+ abc\,\varphi(A, B, C) + N(a, b, c) \tag{39}$$

où

$$N(+1, +1, +1) = p \quad N(-1, -1, -1) = q$$
$$\text{et } N = 0 \text{ autrement.}$$

$\varphi(A, B, C)$ doit être tel que les 8 probabilités écrites soient positives. Mais il n'est possible de trouver une valeur pour $\varphi(A, B, C)$ satisfaisant aux 8 inégalités correspondantes que si $\varphi(A, B)$, $\varphi(A, C)$ et $\varphi(B, C)$ satisfont elles-mêmes à certaines conditions. On obtient celles-ci en remarquant que $\varphi(A, B, C)$ intervient 4 fois avec le signe +, 4 fois avec le signe —, et doit donc être supérieur à 4 quantités et inférieur à 4 autres ; ceci impose que chacune des 4 premières soit inférieure à chacune des 4 secondes. On montre que les seules inégalités nouvelles ainsi introduites sont :

$$\varphi(A, B) < \varphi(A, C) + \varphi(B, C) \quad \varphi(A, C) < \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$$
$$\varphi(B, C) < \varphi(A, B) + \varphi(A, C)$$
$$\text{et} \quad \varphi(A, B) + \varphi(A, C) + \varphi(B, C) < 1. \tag{40}$$

En considérant la loi relative à 4 points ABCD, on introduit un nouveau système d'inégalités, etc... Toutes ces inégalités peuvent s'exprimer immédiatement avec la fonction P au lieu de φ.

Dans la théorie générale des fonctions aléatoires, en considérant les lois pour 2, 3, 4, etc... points, on établit des inégalités analogues pour P, moins strictes, dont on montre qu'elles sont suffisantes pour qu'il existe une fonction aléatoire admettant P comme fonction de corrélation.

La suite d'inégalités (38), (40) etc..., transposées en P, caractérise les fonctions de corrélation des fonctions aléatoires restreintes par la loi (35). Il serait souhaitable de les caractériser de façon plus synthétique, par exemple sur la transformée $I(s)$, mais ceci paraît difficile à réaliser. Toutefois le système (40) permet déjà de déduire certaines propriétés importantes de $P(r)$ qui pourront suffire en pratique.

Supposons satisfaites l'homogénéité et l'isotropie : $\varphi(A, B)$ ne dépend que de $AB = r$. Supposons de plus que $P(r) \to P(0)$ quand $r \to 0$, hypothèse de continuité implicite dans la théorie générale et qui entraîne d'ailleurs que $P(r)$ est continue pour toute valeur de r.

On démontre alors (cf. Annexe I) en utilisant la première inégalité (40), la propriété suivante :

$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\left(\text{et par suite } \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -(\rho_1 - \rho_2)^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)$ existe pour $r = 0$ (la valeur K de cette dérivée peut être finie ou infinie), et $\varphi(r) < K.r$ pour tout r, soit :

$$P(r) > P(0) + rP'(0) \text{ pour tout } r. \tag{41}$$

Donc le terme suivant du développement limité de $P(r)$ au voisinage de 0 est positif.

Nous allons maintenant relier K à une caractéristique de l'interface séparant les 2 phases. Considérons 2 points A et B et toutes les valeurs de ρ sur le segment AB ; le nombre de points $X(AB)$ où ρ change de valeurs sur AB est bien défini, s'il est fini. Supposons que la valeur moyenne $\bar{X}(AB)$ soit finie ; alors, d'après la théorie de l'espérance mathématique, $\bar{X}(AB) = K_1 . AB$, où K_1 est indépendant de A et B et caractérise la fonction aléatoire. Par définition :

$$\bar{X}(AB) = \text{Prob. } [X = 1] + 2 \text{ Prob. } [X = 2]$$
$$+ 3 \text{ Prob. } [X = 3] + \ldots$$

Faisons tendre AB vers zéro ; on peut montrer, si K_1 est fini, que :

$$\frac{\text{Prob. } [X = 1]}{\overline{X}(\text{AB})} \to 1, \text{ soit Prob. } [X = 1] \sim K_1.\text{AB}.$$

Or la probabilité que $\rho(A)$ et $\rho(B)$ soient différents est la probabilité que X soit impair :

$$2\varphi(A, B) = \text{Prob. } [X = 1] + \text{Prob. } [X = 3] + \text{Prob. } [X = 5] + \dots$$

A fortiori, quand

$$\text{AB} \to 0; \quad 2\varphi(A, B) \sim \text{Prob } [X = 1] \sim K_1.\text{AB}.$$

D'où il résulte que $K_1 = 2K$. K est la moitié du nombre moyen de points où ρ change de signe par unité de longueur d'un segment (ou d'une courbe quelconque). X(AB) n'est pas exactement le nombre de points de AB appartenant à la frontière car en un point de contact il peut ne pas y avoir changement de valeur ; mais cette éventualité donne une contribution nulle à la moyenne.

Supposons la frontière suffisamment régulière pour qu'on puisse lui attribuer une superficie, finie dans toute portion limitée de l'espace, soit en moyenne S par unité de volume ; montrons qu'on se trouve dans le cas précédent (K_1 fini) et que $S = 2K_1$. Il s'agit en effet de relier S à la densité moyenne des points d'intersection de la frontière par une droite ; ce problème est un problème classique de « probabilité géométrique ». On montre d'abord que K_1 et S sont proportionnels pour un élément plan, puis un polyèdre ; enfin on considère une surface quelconque comme limite des polyèdres inscrits. Il suffit alors de prendre par exemple pour frontière un réseau de plans parallèles équidistants pour calculer que cette densité moyenne, pour toutes les orientations relatives de la droite et des plans, est $\frac{1}{2}S$. D'où $K = \frac{1}{2}K_1 = \frac{S}{4}$.

$$P'(0) = -\frac{S}{4}(\rho_1 - \rho_2)^2 \tag{42}$$

On démontre que chaque fois que S existe bien, la formule précédente est valable. On peut donc la prendre comme définition de l'interface spécifique de la structure.

2. **Deux phases non homogènes.** — Avant d'élargir le modèle précédent, considérons au préalable un type de modèles tout à fait différents : ceux qui rendent compte de structures où la fluctuation de densité est au contraire partout progressive. Selon la rigueur des conditions de régularité que l'on suppose remplies, la fonction $P(r)$ se trouve astreinte à un développement limité au voisinage de zéro plus ou moins étroitement imposé. Par exemple la densité sera continue en tout point de l'espace si $P(0) - P(r)$ tend vers zéro suffisamment vite avec r ; on montre [8] qu'il suffit que ce soit comme une puissance de r supérieure à 1. Si on impose en outre l'existence de la dérivée « en moyenne », cela revient à poser :

$$P(r) = P(0) - \text{A}r^2 + \dots$$

On peut donc prévoir qu'en prenant maintenant un modèle général comportant à la fois des discontinuités et des fluctuations progressives de la densité, $P(r)$ aura un développement limité du type $P(0) + r.P'(0) + \dots$ et que $P'(0)$ sera en relation stricte avec l'étendue moyenne des discontinuités.

Il est même clair que l'on aura :

$$P'(0) = -\frac{S}{4}.\overline{(\rho_1 - \rho_2)^2} \tag{43}$$

où $\overline{(\rho_1 - \rho_2)^2}$ représente le carré moyen de la discontinuité de densité le long de toutes les surfaces de discontinuité. On peut justifier rigoureusement cette formule en remarquant que, pour r petit, la moyenne $P(r)$ porte sur deux zones dont l'une (voisinage de la frontière) tend vers zéro avec r.

Étudions par exemple un modèle de ce type, destiné à représenter un corps poreux où la phase solide n'est pas homogène ; nous ferons l'hypothèse que les fluctuations de densité ne sont pas influencées par la proximité d'un pore, de sorte qu'en imaginant les pores comme surimposés à une hétérogénéité préalable, nous pourrons poser :

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_a(\mathbf{x}).\rho_b(\mathbf{x})$$

où $\begin{cases} \rho_a(\mathbf{x}) = 1 \text{ dans le solide compact et 0 dans les pores} \\ \rho_b(\mathbf{x}) \text{ est une fonction fluctuant progressivement (même dans les pores).} \end{cases}$

ρ_a et ρ_b étant indépendantes. On peut alors écrire :

$$\overline{\rho(\mathbf{x}+\mathbf{r}).\rho(\mathbf{x})} = \overline{\rho_a(\mathbf{x}+\mathbf{r}).\rho_a(\mathbf{x})}.\overline{\rho_b(\mathbf{x}+\mathbf{r}).\rho_b(\mathbf{x})}$$

$$P(r) + (\bar{\rho})^2 = [P_a(r) + (\bar{\rho}_a)^2].[P_b(r) + (\bar{\rho}_b)^2]$$

avec des notations évidentes. Si p est la proportion de « plein », on a :

$$P_a(0) = pq, \qquad \bar{\rho}_a = p \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = p.\bar{\rho}_b.$$

D'autre part les développements limités fournissent :

$$P(r) = \left[p - \frac{S}{4}r + \dots\right].\left[\overline{\rho_b^2} - \text{A}r^{1+k} + \dots\right] - p^2(\bar{\rho}_b)^2$$

$$P(r) = pq(\bar{\rho}_b)^2 + p\,\sigma_b^2 - \frac{S}{4}\overline{\rho_b^2}\,r - \text{A}pr^{1+k} + \dots \tag{44}$$

Ceci confirme pour cet exemple la formule (43). De plus le terme $-\text{A}pr^{1+k}$ montre que $P(r)$ est inférieur à $P(0) + rP'(0)$ au voisinage de $r = 0$, contrairement à ce qui se passe pour deux phases homogènes. A vrai dire ceci n'est pas absolument certain, car le terme suivant de $P_a(r)$ peut compenser le terme $-\text{A}pr^{1+k}$; mais pour une surface S régulière (nous en verrons un exemple plus loin

avec un système de particules sphériques) le terme suivant de $P_a(r)$ est d'ordre 3. La compensation est donc exceptionnelle. Donc pour un système à 2 phases, le fait que $P(r) > P(0) + rP'(0)$ pourra servir de critère d'homogénéité des 2 phases.

3. **Propriétés résultant de l'existence d'une valeur finie non nulle de** $P'(0)$. — Ainsi la présence d'une interface dans l'échantillon se traduira par l'existence de $P'(0)$ et le fait que $P'(0)$ est fini, non nul. Nous allons examiner les conséquences de cette propriété de $P(r)$.

1re CONSÉQUENCE : Si

$$P(r) = P(0) + r[P'(0) + \varepsilon(r)],$$

on a :

$$Q(t) = Q(0) - P'(0)\, t^2 \log_e t[1 + \varepsilon_1(t)]. \quad (45)$$

On peut démontrer ce théorème sans faire d'autre hypothèse que $\varepsilon(r) \to 0$ avec r (annexe II).

2e CONSÉQUENCE : Si

$$P(r) = P(0) + r[P'(0) + \varepsilon(r)]$$

et si $P(r)$ possède une dérivée seconde, on a en intégrant deux fois par partie :

$$4\pi^2 h^3 J(h)$$
$$= -\int_0^\infty J_0(u)\left[\frac{u}{2\pi h} P''\left(\frac{u}{2\pi h}\right) + P'\left(\frac{u}{2\pi h}\right)\right] du$$

et lorsque $h \to \infty$, moyennant des conditions de régularité suffisantes pour P'' :

$$4\pi^2 h^3 J(h) \to -P'(0)$$

$$J(h) \text{ est équivalent à } \frac{-P'(0)}{4\pi^2 h^3}. \quad (46)$$

Pour la réciproque, il suffit que $J(h)$ soit bornée.

3e CONSÉQUENCE : Sous les mêmes hypothèses, on calcule :

$$4\pi^3 s^2 \int_s^\infty sI(s)\, ds = -P'(0) - \int_0^\infty \cos 2\pi rs \,.\, P''(r)\, dr$$

et quand $s \to \infty$:

$$4\pi^3 s^2 \int_s^\infty sI(s)\, ds \to -P'(0) \quad (47)$$

donc $sI(s)$ est équivalent en moyenne à $\frac{-P'(0)}{2\pi^3 s^3}$.

Pour la réciproque, il suffit que $I(s)$ soit bornée.

4e CONSÉQUENCE : La 2e propriété peut s'établir en raisonnant sur Q au lieu de P. Si la dérivée 3e Q''' existe, on a d'une part :

$$4\pi^3 h^3 J(h) = \int_0^\infty \sin 2\pi ht\, Q'''(t)\, dt$$

d'autre part :

$$Q'''(t) \sim -\frac{2P'(0)}{t} \text{ quand } t \to 0.$$

D'où il résulte que

$$4\pi^2 h^3 J(h) \to -P'(0) \text{ quand } h \to \infty.$$

En diffusion multiple, on peut tirer de (34 *bis*) le développement limité suivant :

$$Q(t, E) = \frac{Q(0)}{dE}\left\{1 - \exp.(-dE)\right\} + [Q(t) - Q(0)] + \ldots$$
$$= Q(0, E) - P'(0)\, t^2 \log t[1 + \varepsilon(t)]. \quad (48)$$

D'autre part la condition de régularité pour Q (sur sa dérivée 3e) se conserve pour l'exponentielle. Donc la valeur limite de $h^3 J(h)$ sera la même en diffusion multiple qu'en diffusion simple.

5e CONSÉQUENCE : Propriété analogue pour $\int_s^\infty sI(s)\, ds$.

Conclusions pratiques : Tant en diffusion simple qu'en diffusion multiple, moyennant des conditions de régularité suffisantes pour $P(r)$ ou $Q(t)$, on a les propriétés asymptotiques suivantes, respectivement pour une focalisation ponctuelle et une focalisation linéaire du faisceau incident :

limite (en moyenne) de

$$s^4\, \mathcal{J}(s) = \frac{S}{8\pi^3}\, \overline{(\rho_1 - \rho_2)^2} \,.\, 0{,}079\, E\lambda^2 \int \mathcal{J}'_0(s_0)\, ds_0 \quad (49)$$

limite (vraie) de

$$h^3\, \mathcal{J}(h) = \frac{S}{16\pi^2}\, \overline{(\rho_1 - \rho_2)^2} \,.\, 0{,}079\, E\lambda^2 \int \mathcal{J}'_0(x_0)\, dx_0 \quad (50)$$

S est exprimée en angströms-carrés par angströms-cube, soit $10^{-8}\, S$ cm²/cm³.

Si dans ces formules, au lieu de l'épaisseur E_{cm}, on introduit la masse de substance par unité de surface m (en g par cm²), l'interface spécifique S doit être exprimée en cm² par g. Rappelons que si ρ_1 et ρ_2 sont remplacées par μ_1 et μ_2 exprimées en g/cm³, il faut remplacer le coefficient numérique 0,079 par 0,00716.

4. **Modèles particulaires.** — Dans le paragraphe I,4 nous avons défini 4 grandeurs typiques générales : $I(0)$, $J(0)$, $Q(0)$ et $P(0)$. Les paragraphes précédents sont en fait l'étude d'une grandeur typique supplémentaire qui peut être introduite dans certains cas : $P'(0)$.

Parmi les systèmes à plusieurs phases que l'on étudie en pratique, on rencontre fréquemment des systèmes « dispersés » dans lesquels toutes les phases sauf une sont constituées par des éléments individualisés (grains dissous, inclusions, pores, etc...). Des renseignements extrinsèques permettront alors souvent de restreindre considérablement *a priori* le modèle de référence. Les

modèles possibles et les lois d'intensité qui s'y rattachent ont été étudiés par de nombreux auteurs. Nous nous contenterons donc de signaler comment on peut interpréter les grandeurs typiques dans les différents cas rencontrés. Les modèles les plus intéressants sont les suivants :

1° Système dilué de particules identiques, orientées au hasard. — Les interférences entre particules sont négligeables ; $P(r)$ dépend essentiellement de la forme des particules. On a :

$$P(r) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 F(r)$$

où n est le nombre de particules par angström-cube et $F(r)$ est le volume qu'une particule a en commun avec son « ombre » décalée d'une distance r (en moyenne pour toutes les orientations de $\mathbf{r}$).

Pour des sphères de diamètre D,

$$F(r) = \frac{\pi D^3}{6}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{r}{D} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^3\right]$$

pour $r < D$ et 0 pour $r > D$.

Si V_0 et S_0 sont le volume et la superficie d'une particule :

$$P(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 V_0 \qquad - P'(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{S_0}{4}$$

$$I(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 V_0^2 = V_0 P(0)$$

D'autre part :

$$J(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 V_0 \frac{\overline{A^2}}{\overline{A}} \qquad Q(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 V_0 \frac{\overline{L^2}}{\overline{L}}$$

où A est l'aire d'une section plane de la particule, L la longueur d'une corde, les moyennes $\overline{A}$, $\overline{A^2}$, $\overline{L}$, $\overline{L^2}$ étant relatives à toutes les intersections possibles par un plan ou une droite.

Enfin

$$\lim_{s \to 0} (I(0) - I(s))/s^2 \qquad (4\pi^2/3)\, I(0)\, R_0^2$$

où R_0 est le rayon de giration des particules.

2° Système dilué de particules sphériques de diamètres différents. — $P(r)$ dépend essentiellement de la loi granulométrique des particules, $f(D)$.

$$P(r) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \int_r^\infty \frac{\pi D^3}{6}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{r}{D} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^3\right] f(D)\, dD.$$

On en déduit la formule générale :

$$\int_0^\infty r^k P(r)\, dr = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi}{2}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)} \int_0^\infty D^{4+k} f(D)\, dD.$$

D'où en particulier :

$$I(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi^2}{36}\int_0^\infty D^6 f(D)\, dD$$

$$J(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi^2}{30}\int_0^\infty D^5 f(D)\, dD$$

$$Q(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi}{8}\int_0^\infty D^4 f(D)\, dD$$

$$P(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi}{6}\int_0^\infty D^3 f(D)\, dD$$

$$- P'(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi}{4}\int_0^\infty D^2 f(D)\, dD$$

$$\lim. \frac{I(0) - I(s)}{s^2} = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi^4}{180}\int_0^\infty D^8 f(D)\, dD$$

$$\lim. \frac{J(0) - J(h)}{h^2} = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi^4}{140}\int_0^\infty D^7 f(D)\, dD.$$

Le rapport de deux quelconques des grandeurs précédentes définit un diamètre moyen.

3° Système concentré de particules sphériques identiques. — $P(r)$ dépend essentiellement de la loi de répartition des distances 2 à 2 des particules : $G(r)$.

$$P(\mathbf{r}) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \left\{ F(\mathbf{r}) - n\int F(\mathbf{r} - \mathbf{x})\,[1 - G(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x} \right\}$$

où $nG(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ est la probabilité pour que dans l'élément de volume $d\mathbf{x}$ se trouve le centre d'une particule, lorsque cet élément de volume est repéré par le vecteur $\mathbf{x}$ par rapport au centre d'une particule donnée. Nécessairement $G(r) = 0$ pour $r < D$. $F(r)$ pour des sphères a été donné ci-dessus.

Utilisant l'isotropie et passant en coordonnées bipolaires on obtient :

$$P(r) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \left\{ F(r) - \frac{2\pi n}{r}\iint yzF(y)\,[1 - G(z)]\, dy\, dz \right\}$$

où l'intégrale double est effectuée dans le domaine :

$$y + z > r, \quad |y - z| < r.$$

On obtient, en posant $n\dfrac{\pi D^3}{6} = p$

$$P(0) = (\rho_2 - \rho_1)^2 p(1 - p) \qquad - P'(0) = n(\rho_2 - \rho_1)^2 \frac{\pi D^2}{4}.$$

D'autre part en posant

$$\int_D^\infty z^k [1 - G(z)]\, dz = D^{k+1} g(k+1)$$

on obtient pour k entier ($\geqslant 1$) :

$$\int_0^\infty r^k P(r)\,\mathrm{d}r = p(\rho_2 - \rho_1)^2 D^{k+1}$$

$$\Big\{\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+4)} - p\Big[\frac{1}{k+1} + \frac{72(k-2)}{3!\,5.6.8}$$

$$+ \frac{72(k-1)(k-2)(k-4)}{5!\,7.8.10}$$

$$+ \frac{72(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-6)}{7!\,9.10.12} + \dots + g(k)$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)}{3!}\,\frac{72}{5.6.8}\,g(k-2)$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{5!}\,\frac{72}{7.8.10}\,g(k-4) + \dots\Big]\Big\}.$$

En particulier :

$$J(0) = 2\pi\,p(\rho_2 - \rho_1)^2 D^2 \left\{\frac{1}{10} - p\left[\frac{9}{20} + g(1)\right]\right\}$$

$$I(0) = 4\pi\,p(\rho_2 - \rho_1)^2 D^3 \left\{\frac{1}{24} - p\left[\frac{1}{3} + g(2)\right]\right\}.$$

Enfin, pour $k = 0$:

$$Q(0) = 2p(\rho_2 - \rho_1)^2 D$$

$$\Big\{\frac{3}{8} - p\,\frac{81 - 72\log 2}{35} - 1{,}2\,p\int_1^\infty \Big[(u - 5u^3)\log\frac{u+1}{u-1}$$

$$+ (5u^4 - u^6)\log\frac{u^2}{u^2-1} + \frac{u^2+1}{2} + u^4\Big]\,[1 - G(uD)]\,\mathrm{d}u\Big\}$$

(le coefficient de $-p$ vaut 0,8884).

Par exemple, supposons que $G(z)$ corresponde à l'équilibre « thermodynamique » de sphères « dures » sans force d'interaction. Il est connu que, pour $u > 1$:

$$G(uD) = e^{pf_1 + p^2 f_2 + \dots}.$$

$$1 - G(uD) = -pf_1 - p^2\left(\frac{f_1^2}{2} + f_2\right) + \dots$$

où $f_1(u) = 1/2\,(u + 4)(u - 2)^2$ pour $1 < u < 2$ et 0 pour $u > 2$.

$f_2(u)$ est une fonction compliquée qui a été calculée et tabulée par Nijboer et Van Hove (*Phys. Rev.*, 1952, **85**, 777).

On obtient alors dans ce cas :

$$Q(0) = 2p(\rho_2 - \rho_1)^2 D$$
$$\{0{,}375 - 0{,}8884\,p + 0{,}9506\,p^2 - 0{,}97\,p^3 + \dots\}$$

$$J(0) = 2\pi\,p(\rho_2 - \rho_1)^2 D^2$$
$$\{0{,}1 - 0{,}45\,p + 1{,}1\,p^2 - 2{,}16\,p^3 + \dots\}$$

$$I(0) = 4\pi\,p(\rho_2 - \rho_1)^2 D^3$$
$$\left\{\frac{1}{24} - \frac{1}{3}p + \frac{17}{12}p^2 - 4{,}395\,p^3 + \dots\right\}.$$

Conclusion. — Pour conclure, nous résumerons simplement les principaux résultats théoriques obtenus, en vue d'une discussion ultérieure sur des cas concrets de l'application de la diffusion centrale à la détermination des surfaces spécifiques.

Quelle que soit la répartition du faisceau direct dans le plan d'enregistrement et indépendamment du fait qu'on opère en diffusion simple ou multiple, le comportement asymptotique vers les grands angles de l'intensité diffusée permet de vérifier la présence d'une interface dans la substance irradiée, et de mesurer en valeur absolue l'interface spécifique S, si l'on peut rapporter l'intensité diffusée en un point au flux total transmis. Plus précisément on obtient la valeur de S multipliée par la moyenne de $(\rho_1 - \rho_2)^2$, où $\rho_1 - \rho_2$ est la discontinuité de densité à la traversée de l'interface.

Parmi les autres grandeurs caractéristiques de la diffusion, l'une des plus importantes est la variance de la densité dans la substance.

Par exemple, si on a affaire à un corps poreux de porosité p inconnue, dont la phase pleine est homogène de densité ρ inconnue, la mesure de la densité apparente fournira $(1 - p)\,\rho$, la variance de la densité fournira $p(1 - p)\,\rho^2$ et l'intensité aux grands angles $S\rho^2$. Ainsi la diffusion centrale permettra une mesure de p et S. La forme de la transformée de Fourier de l'intensité diffusée peut permettre d'ailleurs de contrôler l'homogénéité de la phase solide.

Enfin si on a affaire à un système particulaire, on pourra déterminer différentes autres grandeurs caractérisant sa finesse et pouvant être mises en parallèle avec la surface spécifique sous la forme de « diamètres moyens ».

Annexe I. — Pour 3 points ABC quelconques on a :

$$|\varphi(AC) - \varphi(AB)| < \varphi(BC).$$

Si $C \to B$, $\varphi(BC) \to 0$, et par suite $\varphi(AC) \to \varphi(AB)$. La fonction $\varphi(AB)$ est donc (uniformément) continue en tout point.

Posons $\psi(AB) = \varphi(AB)/AB$. C'est une fonction continue en tout point sauf peut-être pour $AB = 0$. Elle tend vers zéro quand $AB \to \infty$, puisque φ reste bornée. Elle est partout positive. Donc elle atteint sa borne supérieure K, à moins que cette borne soit la limite supérieure de $\psi(AB)$ lorsque $AB \to 0$. C'est effectivement cette seconde possibilité qui est réalisée, car s'il y avait deux segments AB' et AB ($AB' < AB$) avec

$$\psi(AB') < \psi(AB) = K = \max.\ \psi,$$

on aurait :

$$\varphi(AB') < K.AB' \quad \varphi(B'B) \leqslant K.B'B \quad \varphi(AB) = K.AB$$

$$\varphi(AB') + \varphi(B'B) < K(AB' + B'B) = K.AB = \varphi(AB)$$

ce qui est impossible.

K peut être fini ou infini. Nous allons montrer que la limite inférieure de ψ est aussi égale à K. Pour cela, remarquons d'abord qu'on peut géné-

raliser de proche en proche l'inégalité triangulaire à un contour quelconque :

$$\varphi(AB) < \varphi(AM_1) + \varphi(M_1 M_2) + \varphi(M_2 M_3) + \ldots + \varphi(M_n B).$$

Dès lors, fixons-nous un segment AB et prenons entre A et B un point M_1 qui tendra ensuite vers A. Mettons bout à bout des segments égaux AM_1, $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ... jusqu'à un point M_n tel que $M_n B < AM_1$. On aura :

$$\varphi(AB) < n\,\varphi(AM_1) + \varphi(M_n B)$$

ou

$$\varphi(AM_1) > (\varphi(AB) - \varphi(M_n B))/n.$$

Comme on a $AB = n\,AM_1 + M_n B$, on peut écrire :

$$\varphi(AM_1)/AM_1 > (\varphi(AB) - \varphi(M_n B))/(AB - M_n B).$$

Quand $M_1 \to A$, comme $M_n B < AM_1$, $M_n B$ et $\varphi(M_n B) \to 0$; le second membre tend vers $\varphi(AB)/AB$. Il en résulte : lim. inf. $\psi \geqslant \psi(AB)$ quel que soit AB. Il suffit alors de prendre une suite de valeurs AB telles que $\psi(AB)$ se rapproche indéfiniment de K, pour montrer que lim. inf. $\psi = K$.

En résumé $\varphi(AB)/AB \to K$ quand $AB \to 0$ et $\varphi(AB)/AB < K$ pour tout AB.

Annexe II. — Nous étudions le développement limité au voisinage de zéro de

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\sqrt{t^2 + z^2}\right) dz$$

connaissant celui de $P(r)$. Nous utiliserons le fait que $P(0) - P(r)$ est positif et borné (restriction qui pourrait être élargie).

Posant $\sqrt{t^2 + z^2} = u$ on a :

$$\begin{aligned} Q(0) - Q(t) &= 2\int_0^\infty P(u)\,du - 2\int_t^\infty \frac{uP(u)\,du}{\sqrt{u^2 - t^2}} \\ &= 2\int_0^t P(u)\,du - 2\int_t^\infty \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 1\right) P(u)\,du \\ &= 2\int_0^t P(0)\,du - 2\int_t^\infty \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 1\right) P(0)\,du \\ &\quad - 2\int_0^t [P(0) - P(u)]\,du \\ &\quad + 2\int_t^\infty \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 1\right) [P(0) - P(u)]\,du. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est bien convergente, car l'intégrant est : $\sim \dfrac{1}{2}\dfrac{t^2}{u^2} P(0)$ quand $u \to \infty$. L'intégration des deux premiers termes est immédiate : ces deux termes se détruisent.

Écrivons encore :

$$\begin{aligned} Q(0) - Q(t) &= t^2 \int_t^\infty \frac{P(0) - P(u)}{u^2}\,du \\ &\quad + \int_t^\infty \left[\frac{2u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 2 - \frac{t^2}{u^2}\right] [P(0) - P(u)]\,du \\ &\quad - 2\int_0^t [P(0) - P(u)]\,du. \end{aligned}$$

On peut montrer que pour des conditions très générales le premier terme est la partie principale de $Q(0) - Q(t)$ quand $t \to 0$.

Nous considérerons seulement 2 cas :

1[er] *cas.* $P(0) - P(r) = r^2[A - f(r)]$ où $f(r) \to 0$ avec r (et $\to A$ quand $r \to \infty$).

En effectuant la substitution et en utilisant :

$$\int_t^\infty u^2 \left[\frac{2u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 2 - \frac{t^2}{u^2}\right] du = \frac{5}{3} t^3$$

il vient :

$$\begin{aligned} Q(0) - Q(t) &= t^2 \int_0^\infty \frac{P(0) - P(u)}{u^2}\,du \\ &\quad + t^2 \int_0^t f(u)\,du + 2\int_0^t u^2 f(u)\,du \\ &\quad - \int_t^\infty \left[\frac{2u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 2 - \frac{t^2}{u^2}\right] u^2 f(u)\,du. \end{aligned}$$

$|f(u)|$ étant borné (par M), l'ensemble des termes autres que le premier est borné par une quantité en t^3 $\left(\text{le dernier par } \dfrac{5}{3} Mt^3\right)$. Donc :

$$Q(0) - Q(t) = t^2 \int_0^\infty \frac{P(0) - P(u)}{u^2}\,du + t^3 g(t)$$

où $g(t)$ reste fini quand $t \to 0$.

Si $f(r) \to 0$ comme une puissance connue de r, on peut préciser l'allure de $g(t)$ au voisinage de zéro : il suffit de faire apparaître de nouveau le terme principal dans la dernière intégrale. Par exemple si $f(r)$ est de l'ordre de r, $g(t)$ est de l'ordre de $t \log t$.

Par ailleurs la partie principale de $Q(0) - Q(t)$ reste la même si $P(0) - P(r)$ tend vers zéro comme une puissance de r différente de 2 mais supérieure à 1.

2[e] *cas.* $P(0) - P(r) = r[A - f(r)]$ où $f(r) \to 0$ avec r.

En effectuant la substitution et en utilisant :

$$\int_t^\infty u\left[\frac{2u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 2 - \frac{t^2}{u^2}\right] du = (1 + \log 2)\, t^2$$

il vient :

$$Q(0) - Q(t) = t^2 \int_t^\infty \frac{P(0) - P(u)}{u^2} \, du$$
$$+ At^2 \log 2 + 2 \int_0^t uf(u) \, du$$
$$- \int_t^\infty \left[\frac{2u}{\sqrt{u^2 - t^2}} - 2 - \frac{t^2}{u^2} \right] uf(u) \, du.$$

Le premier terme est le terme principal car l'intégrale croît indéfiniment quand $t \to 0$, alors que tous les autres termes sont bornés par une quantité en t^2, $|f(u)|$ étant borné. Comme $P(0) - P(u)$ est équivalent à Au pour u petit, il est intuitif que ce premier terme est équivalent à $At^2[- \log t]$. En voici une démonstration rigoureuse.

Puisque $f(u) \to 0$, si on se donne ε positif quelconque, on peut choisir α tel que : $|f(u)| < \varepsilon$ pour $u < \alpha$. On aura pour $t < \alpha$:

$$I(t) = \int_t^\infty \frac{P(0) - P(u)}{u^2} \, du$$
$$= \int_t^\alpha \frac{A - f(u)}{u} \, du + \int_\alpha^\infty \frac{P(0) - P(u)}{u^2} \, du.$$

En appelant $C(\alpha)$ le dernier terme, on pourra écrire :

$$\int_t^\alpha \frac{A - \varepsilon}{u} \, du + C(\alpha) < I(t) < \int_t^\alpha \frac{A + \varepsilon}{u} \, du + C(\alpha)$$

$$(A - \varepsilon)(\log \alpha - \log t) + C(\alpha) < I(t)$$
$$< (A + \varepsilon)(\log \alpha - \log t) + C(\alpha)$$

$$A - \varepsilon + \frac{(A - \varepsilon) \log \alpha + C(\alpha)}{- \log t}$$
$$< \frac{I(t)}{- \log t} < A + \varepsilon + \frac{(A + \varepsilon) \log \alpha + C(\alpha)}{- \log t}.$$

Lorsque $t \to 0$, ces inégalités montrent que les limites inférieure et supérieure de $\frac{I(t)}{- \log t}$ sont comprises entre $A - \varepsilon$ et $A + \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on a $\lim \frac{I(t)}{- \log t} = A$.

Il est à noter que cette démonstration ne donne pas d'indication sur l'ordre de grandeur du « reste ». On peut seulement écrire :

$$Q(0) - Q(t) = At^2 (- \log t) [1 + \varepsilon(t)] \text{ où } \varepsilon(t) \to 0 \text{ avec } t.$$

Si on connaît la partie principale de $f(r)$ on peut améliorer le développement précédent. Par exemple si $P(0) - P(r) = r[A - rf(r)]$ où $f(r)$ reste borné, on obtient :

$$Q(0) - Q(t) = At^2 \left(- \log \frac{t}{2t_0} \right)$$
$$+ t^2 \int_0^\infty \frac{1}{u^2} \left[P(0) - P(u) - \frac{At_0^2 u}{t_0^2 + u^2} \right] du + t^3 g(t)$$

où t_0 est arbitraire et où $g(t)$ reste fini quand $t \to 0$.

Par exemple, en prenant $t_0 = P(0)/A$ et en posant $At/P(0) = \tau$:

$$Q(0) - Q(\tau) = \frac{P(0)^2}{A} \tau^2$$
$$\left\{ \log \frac{2}{\tau} + \int_0^\infty \left[1 - P(\tau) - \frac{\tau}{1 + \tau^2} \right] \frac{d\tau}{} + \tau g(\tau) \right\}.$$

Manuscrit reçu le 2 mai 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUINIER (A.) et FOURNET (G.), Small angle scattering of X-Rays. Édit. : New-York, London ; John Wiley and Sons, Chapman and Hall, 1955.

[2] GUINIER (A.), Théorie et technique de la radiocristallographie. Édit. : Paris, Dunod, 1956.

[3] Handbuch der Physik, B. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1957. (Article : Fournet (G.), Étude de la structure des fluides et des substances amorphes au moyen de la diffusion des rayons X.)

[4] POROD (G.), Die Röntgenkleinwinkelstreuung von dichtgepackten kolloiden Systemen, I. *Koll.-Z.*, 1951, **124**, n° 2, 83-114.

[5] LUZZATI (V.), Interprétation géométrique de la diffusion aux petits angles d'un faisceau de rayons X de section infiniment haute et étroite. *Acta Cryst.*, 1957, **10**, 2, 136-8.

[6] LUZZATI (V.), Diffusion centrale multiple des rayons X par la matière hétérogène. *Acta Cryst.* (sous presse).

[7] DURIF (S.) Essais de mesure absolue de surfaces spécifiques par la diffusion des rayons X aux petits angles. *J. Chim. Phys.* (sous presse).

[8] BLANC-LAPIERRE (A.) et FORTET (R.), Théorie des fonctions aléatoires. Applications à divers phénomènes de fluctuation. Édit. : Paris, Masson, 1953.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 7
TOME 18, JUILLET 1957, PAGE 103 A

L'EXTRÊME FAIBLESSE DES PRISES MAXIMUM TOLÉRABLES DES RADIONUCLIDES REND INEFFICACES LES APPAREILS DE DÉTECTION DE RAYONNEMENTS ACTUELS

Par PIERRE-OCTAVE ROBERT,
Professeur Agrégé de Physique.

L'extrême faiblesse de la prise maximum tolérable. — D'une façon générale on peut dire que la prise maximum tolérable qui aboutira à une dose de 0,3 rem par semaine est pour la plupart des cas de l'ordre de 10^{-16} à 10^{-9} milligramme [1].

Dans le cas d'une blessure par piqûre avec matière radioactive insoluble, la prise maximum tolérable qui aboutira à une dose de 0,3 rem par semaine est, pour l'astate, de $8{,}9 \times 10^{-17}$ mg, l'emplacement de la piqûre étant ici obligatoirement le tissu critique (Karl Z. Morgan admettant que le diamètre effectif) du tissu contaminé dans ce cas est de 0,1 cm, ce qui conduit à 1 mg de tissu.

Nous avons considéré qu'il était beaucoup plus intéressant de déterminer les prises maximum tolérables (M. P. I. maximum permissible intake) en milligrammes pour la dose de 150 rem pour la durée d'une vie de 70 ans, chiffre admis par la plupart des auteurs (1).

Nous avons effectué ces calculs :

1° pour les substances pratiquement dangereuses dans l'industrie nucléaire ;

2° pour les substances pratiquement dangereuses dans les application médicales.

Nous donnerons ici un *tableau d'ensemble des résultats obtenus pour les substances pratiquement dangereuses dans l'industrie nucléaire.*

Nous constatons que les prises maximum tolérables aboutissant à 150 rem/70 ans sont comprises entre $1{,}4 \times 10^{-13}$ mg et 1,21 mg, ^{238}U étant mis à part. *Si l'on s'en tient aux 15 radionuclides qui ont les plus faibles valeurs de M. P. I. dans chaque cas et qui comprennent 10 radionuclides classés dans les 15 premiers dans tous les cas* et 10 radionuclides parmi les 11 considérés comme les plus dangereux pratiquement [2], *les prises maximum aboutissant à une dose de 150 rem en 70 ans varient entre* $1{,}4 \times 10^{-13}$ *et* $9{,}7 \times 10^{-4}$ *mg.*

Il apparaît que dans la plupart des cas ces quantités sont si petites qu'elles peuvent être inhalées ou injectées dans une particule unique de poussière, sans même que l'on s'en aperçoive.

Les doses intégrées perçues sont fournies par la plaque photographique, le stylo-électromètre (20 000 F) et le stylo-condensateur (2 000 F).

(1) Le classement par M. P. I. en microcuries donnant mal la progression du risque.

L'intensité du rayonnement est donnée presque instantanément par le « Chambre babylog » (100 000 F). Tous ces appareils sont excellents pour les rayonnements.

Mais il est essentiel de remarquer que ces appareils réagiront de façon minime au passage d'une particule de radionuclide lors de sa pénétration dans l'organisme, et que, si sa demi-vie radioactive et sa demi-vie biologique sont longues, *cette particule pourra émettre un rayonnement destructeur et permanent dans l'organisme qui amènera sa destruction rapide, sans que les appareils de mesure actuellement en service aient pu détecter la particule mortelle. La protection, plus particulièrement en zone contaminée par explosions de bombes atomiques, nécessitera des masques opérant un filtrage minutieux des poussières.*

Le classement par moyenne des rangs dans les cinq éventualités peut surprendre à première vue, mais il n'est pas possible de se baser sur la moyenne des M. P. I., car ceci reviendrait à éliminer le troisième cas (piqûre matière radioactive insoluble) dont les M. P. I. sont extraordinairement faibles et il faut reconnaître que ce classement d'après la moyenne des rangs est le seul qui donne une idée exacte de la moyenne des M. P. I. en mg compte tenu du troisième cas. Nous préciserons cependant que le numérotage des radionuclides dans la première colonne n'a rien d'absolu, et qu'il ne faut voir dans cette colonne que des groupes de radionuclides sans hiérarchie stricte, les dix premiers présentant des M. P. I. en mg très faibles, les dix suivants des M. P. I. en mg faibles, les cinq derniers des M. P. I. en mg relativement fortes.

REMARQUES. — Parmi les radionuclides cidessus, quelques-uns se manifestent fort peu, mais il faut considérer que, pour certains d'entre eux, une particule très petite suffit pour faire courir à celui qui l'absorbe un danger considérable.

C'est le cas des transuraniens : ^{242}Cm et ^{241}Am dont la production est très faible, c'est celui de ^{86}Rb (T_r = 19,5 j, pourcentage : $2{,}8 \times 10^{-5}$ %). A son sujet il faut par-contre remarquer que ^{88}Rb (T_r = 17,8 mn ; 3,5 % ; 2,08 MeV β^- et γ) se produit à la fois dans la fission du thorium et de l'uranium.

Nous avons donné aussi ^{129}Te et ^{127}Te malgré

leur faible rendement de production. En fait O. R. N. L. 1783 donne :

^{127}Te ($T_r = 9,3$ h ; pourcentage : 0,25 % énergie β^- : 0,23 MeV) qui fournit : ^{127m}Te ($T_r = 90,4$ j ; 0,056 % ; énergie γ : 0,09 MeV). Ces radionuclides se produisent dans la fission de : U, ^{233}U, ^{235}U [3].

^{129}Te ($T_r = 72$ mm ; pourcentage : 1 % ; énergie β^- et γ : 1,7 MeV) qui fournit : ^{129m}Te ($T_r = 33,5$ j ; pourcentage : 0,34 % ; énergie γ : 0,106 MeV). ^{129}Te se produit dans la fission du thorium et de l'uranium, ^{129m}Te apparaissant dans celle de U, ^{233}U, ^{235}U.

Il est essentiel de remarquer que les pourcentages les plus forts et les énergies les plus fortes appartiennent à ^{135}Te, ^{131}Te, ^{134}Te, ^{133m}Te, ^{132}Te. ^{96}Tc ne figure pas parmi les produits de fission donnés par O. R. N. L. 1783, A. N. L. 5334 et A. D. C. 75 ; il figure cependant sur A. E. C. U. 3144. Les premiers de ces documents font figurer : ^{102}Tc ($T_r = 25$ s, 4,2 %, 1,1 MeV β^-), ^{101}Tc ($T_r = 14$ mn ; 5 % ; 0,70 MeV β^- et γ), ^{99m}Tc ($T_r = 6,04$ h ; 0,6 % ; 0,141 MeV γ) qui intervient dans la fission de l'uranium et du thorium et donne ^{99}Tc ($T_n = 2,12 \times 10^5$ ans ; 0,097 MeV β^-).

Nous n'avons pas retenu ^{147}Nd qui ne fait l'objet d'aucune étude particulière dans ICRP/54/4 et présente un danger réduit du fait de son énergie, de sa période.

Nous n'avons pas retenu non plus ^{93}Zr ($T_e = 9,5 \times 10^5$ ans ; 6,5 %) qui fournit une énergie β^- très faible de 0,021 MeV et pas d'énergie γ ; ni ^{107}Pd ($T_r = 7 \times 10^6$ ans) qui fournit

CLASSEMENT MOYEN PAR PRISE MAXIMUM TOLÉRABLE (M. P. I.) EN MG DÉCROISSANTE CORRESPONDANT A UNE DOSE DE 150 REM EN 70 ANS POUR LES SUBSTANCES LES PLUS DANGEREUSES DANS L'INDUSTRIE NUCLÉAIRE DANS CINQ ÉVENTUALITÉS DIFFÉRENTES

Classement moyen par M. P. I. en mg décroissante		M. P. I. en mg qui aboutira à une dose de 150 rem en 70 ans				M. P. I. en mg 0,3 rem/sem (1)
		Matière radioactive soluble		Matière radioactive insoluble		
		Inhalation	Piqure	Piqure	Inhalation	Inhalation Tractus gastro-intestinal
Radionuclide	Organe critique	Autre que poumon et tractus gastro-intestinal dans ces deux cas		Organe critique Emplacement blessure	Poumon Organe critique	Organe critique
—	—	—		—	—	—
(1) ^{242}Cm	Os	(2) $5,1 \times 10^{-6}$	(1) $4,2 \times 10^{-8}$	(1) $1,4 \times 10^{-13}$	(1) $3,3 \times 10^{-6}$	(2) $1,8 \times 10^{-8}$
(2) ^{140}Ba + ^{140}La	Os	(4) $5,9 \times 10^{-5}$	(3) $5,46 \times 10^{-6}$	(3) $2,94 \times 10^{-12}$	(3) $3,1 \times 10^{-5}$	(5) $9,5 \times 10^{-8}$
(3) ^{140}La	Os	(9) $1,76 \times 10^{-4}$	(8) $1,37 \times 10^{-5}$	(7) 4×10^{-12}	(4) $3,6 \times 10^{-5}$	(1) $1,1 \times 10^{-8}$
(4) ^{89}Sr	Os	(3) $4,7 \times 10^{-5}$	(5) $8,64 \times 10^{-6}$	(4) $3,56 \times 10^{-12}$	(9) $8,6 \times 10^{-5}$	(10) $6,1 \times 10^{-7}$
(5) ^{91}Y	Os	(6) $8,4 \times 10^{-5}$	(6) $7,2 \times 10^{-6}$	(5) $3,64 \times 10^{-12}$	(10) $8,8 \times 10^{-5}$	(9) $2,6 \times 10^{-7}$
(6) ^{129}Te	Reins	(11) $3,3 \times 10^{-4}$	(9) $3,6 \times 10^{-5}$	(6) 4×10^{-12}	(5) $4,3 \times 10^{-5}$	(7) $2,0 \times 10^{-7}$
(7) ^{105}Rh	Reins	(10) $2,4 \times 10^{-4}$	(8) $2,9 \times 10^{-5}$	(9) 6×10^{-12}	(11) 9×10^{-5}	(3) $2,4 \times 10^{-8}$
(8) ^{131}I	Thyroïde	(1) $4,6 \times 10^{-6}$	(2) $9,6 \times 10^{-7}$	(12) $1,2 \times 10^{-11}$	(13) $1,2 \times 10^{-4}$	(16) $2,3 \times 10^{-6}$
(9) ^{144}Ce + ^{144}Pr	Os	(7) $1,18 \times 10^{-4}$	(6) $9,9 \times 10^{-6}$	(10) $6,08 \times 10^{-12}$	(14) $1,3 \times 10^{-4}$	(13) $9,2 \times 10^{-7}$
(10) ^{86}Rb	Muscle	(15) $1,26 \times 10^{-3}$	(17) $3,1 \times 10^{-4}$	(2) $2,6 \times 10^{-12}$	(6) $5,2 \times 10^{-5}$	(14) $1,7 \times 10^{-6}$
(11) ^{143}Pr	Os	(12) $5,85 \times 10^{-4}$	(10) $4,8 \times 10^{-5}$	(11) $8,1 \times 10^{-12}$	(15) $1,95 \times 10^{-4}$	(8) $2,0 \times 10^{-7}$
(12) ^{95}Zr + ^{95}Nb	Os	(13) $7,5 \times 10^{-4}$	(11) $6,1 \times 10^{-5}$	(14) $1,27 \times 10^{-11}$	(7) $5,6 \times 10^{-5}$	(11) $7,5 \times 10^{-7}$
(13) ^{96}Tc	Reins	(16) $1,89 \times 10^{-3}$	(19) $3,7 \times 10^{-4}$	(16) $5,9 \times 10^{-11}$	(2) $2,5 \times 10^{-5}$	(4) $7,0 \times 10^{-8}$
(14) ^{106}Ru + ^{106}Rh	Reins	(17) 2×10^{-3}	(15) $1,65 \times 10^{-4}$	(8) $4,93 \times 10^{-12}$	(12) 10^{-4}	(12) $7,9 \times 10^{-7}$
(15) ^{90}Sr + ^{90}Y	Os	(5) $7,5 \times 10^{-5}$	(7) $1,35 \times 10^{-5}$	(17) $8,5 \times 10^{-11}$	(17) $2,05 \times 10^{-3}$	(20) $1,0 \times 10^{-1}$
(16) ^{99}Mo	Os	(22) 0,264	(22) $5,3 \times 10^{-2}$	(13) $1,23 \times 10^{-11}$	(8) $7,7 \times 10^{-5}$	(6) $1,5 \times 10^{-7}$
(17) ^{227}Te	Reins	(19) $2,75 \times 10^{-3}$	(18) $3,1 \times 10^{-4}$	(15) $1,43 \times 10^{-11}$	(16) $2,9 \times 10^{-4}$	(15) $2,0 \times 10^{-6}$
(18) ^{241}Am	Os	(14) $8,9 \times 10^{-4}$	(12) $7,6 \times 10^{-5}$	(18) $9,9 \times 10^{-11}$	(18) $2,34 \times 10^{-3}$	(17) $2,2 \times 10^{-5}$
(19) ^{239}Pu	Os	(15) $9,7 \times 10^{-4}$	(13) $8,32 \times 10^{-5}$	(22) $5,12 \times 10^{-9}$	(21) $1,2 \times 10^{-1}$	(21) $1,1 \times 10^{-3}$
(20) ^{154}Eu	Os	(18) $2,45 \times 10^{-3}$	(16) $2,1 \times 10^{-4}$	(20) $5,6 \times 10^{-10}$	(19) $3,4 \times 10^{-3}$	(19) $7,5 \times 10^{-5}$
(21) ^{147}Pm	Os	(20) $1,76 \times 10^{-2}$	(20) $1,4 \times 10^{-3}$	(19) $3,1 \times 10^{-10}$	(22) $7,5 \times 10^{-1}$	(18) $5,9 \times 10^{-5}$
(22) ^{137}Cs + ^{137}Ba	Muscle	(23) 0,675	(24) $1,69 \times 10^{-1}$	(21) $1,24 \times 10^{-9}$	(20) $9,4 \times 10^{-3}$	(22) $2,7 \times 10^{-3}$
(23) ^{151}Sm	Os	(21) $3,1 \times 10^{-2}$	(21) $2,52 \times 10^{-3}$	(23) $3,53 \times 10^{-8}$	(23) $8,4 \times 10^{-1}$	(24) $8,0 \times 10^{-3}$
(24) ^{233}U	Os	(24) 1,21	(23) $6,27 \times 10^{-2}$	(24) $3,74 \times 10^{-8}$	(24) $8,9 \times 10^{-1}$	(23) $7,9 \times 10^{-3}$
(25) ^{238}U	Reins	(25) $2,43 \times 10^{4}$	(25) $1,95 \times 10^{3}$	(25) $5,4 \times 10^{-4}$	(25) $1,32 \times 10^{4}$	(25) $7,7 \times 10^{3}$

(1) Nous adoptons ici la dose de 0,3 rem/sem, les substances demeurant seulement 31 h dans le tractus gastro-intestinal ; dans ce cas la matière est inhalée, puis remonte des bronches par les cils et est avalée.

Note — Des informations récentes ont amené à diviser par « 3 » toutes les MPI des cas 1 (matière radioactive soluble. Inhalation) et 4 (matière radioactive insoluble). Inhalation. Poumon organe critique. D'autres réductions sont envisagées pour l'avenir, ce qui ne peut donner que plus de force à nos conclusions.

une énergie β^- très faible de 0,01 MeV et pas d'énergie γ.

Précisons que ^{154}Eu ne figure pas parmi les produits de fission donnés par O. R. N. L. 1783 et A. N. L. 5334 ; O. R. N. L. 1783 donne de faibles pourcentages pour ^{155}Eu (0,031 %), ^{156}Eu (0,013 %) et ^{157}Eu (0,0074 %) A. N. L. 5334 ne donne que ^{155}Eu et ^{156}Eu avec de faibles pourcentages encore plus accentués dans la fission de ^{239}Pu.

Manuscrit reçu le 27 mai 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Morgan (K. Z.), Snyder (W. S.) et Ford (M. R.), Conférence de Genève, A/CON. 8/P/79.

[2] Ceci résultant de travaux effectués par nous et qui seront publiés ultérieurement.

[3] *O. R. N. L.* 1783, U. S. A. E. C. — Nuclear properties of ^{235}U fission products, by J. O. Blomecke, Nov. 1955, **2**, Oak Ridge, Tennessee.

A. N. L. 5334, U. S. A. E. C. — Estimation of fission product spectra in fuel elements discharged from the Power Breeder Reactor and the Experimental Breeder Reactor, n° 2, by I. G. Dillon et Lerlle Burns Jr, Oct. 1954, Technical Information Extension, Oak Ridge, Tennessee.

A. E. C. U. 3144, U. S. A. E. C. — A table of radionuclides arranged according to half-life by Herbert Mottram Clark, Donald Emmett Neil, Dec. 1955, Technical Information Extension, Oak Ridge, Tennessee.

INFORMATION

Congrès international sur la physique de l'état solide et ses applications à l'électronique et aux télécommunications. — Ce congrès se tiendra à Bruxelles, à l'occasion de l'Exposition Universelle du 2 au 7 juin 1958. Les trois thèmes principaux en seront les *semi-conducteurs* (préparation, propriétés ; influence des imperfections cristallines ; diodes, transistors et autres applications), les *matériaux magnétiques* (ferrites, oxydes hexagonaux et autres matériaux ; propriétés magnétiques ; superconductivité ; amplificateurs magnétiques, ensembles micro-ondes, masers et leurs applications, commutateurs) et les *matériaux photosensibles et luminescents* (matériaux sensibles aux radiations, phosphores, matériaux électro-luminescents, détecteurs infra-rouges, amplificateurs de lumière, amplificateurs d'images, etc.).

Les auteurs qui désirent présenter des communications dans ces domaines sont priés de se faire connaître le plus tôt possible aux organisateurs.

La préférence sera donnée aux communications qui traiteront de recherches fondamentales des phénomènes de l'état solide en liaison avec des applications potentielles dans les domaines de l'électronique et des télécommunications, ou aux communications qui traiteront du développement d'appareils et de techniques basés sur des progrès récents dans ce domaine.

Les titres des communications doivent être soumis aux organisateurs du Congrès avant le 1er janvier 1958 et les résumés, de quelque 500 mots, doivent parvenir avant le 1er mars 1958. Les langues officielles du Congrès sont l'allemand, l'anglais et le français.

Les auteurs de communications et les personnes désirant assister à ce Congrès sont priés d'écrire au *Secrétaire Général de la Société Belge de Physique*, 18, *route de Philippeville, Loverval* (*Belgique*). Les programmes et renseignements complémentaires seront envoyés, dès que possible, aux personnes intéressées.

SUPPLÉMENT AU N° 7
TOME 18, JUILLET 1957, PAGE 106 A.

LA MODULATION DES COURANTS CONTINUS PAR MODULATEUR EN ANNEAU

Par J. L. LEROY(*) et C. MABBOUX
Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences de Caen.

Introduction. — L'une des méthodes employées pour amplifier de façon stable les courants continus consiste à les moduler pour appliquer la tension alternative obtenue sur la grille de la lampe d'entrée d'un amplificateur ordinaire, par l'intermédiaire d'un transformateur s'il y a lieu d'adapter les impédances. Nous étudierons ici les conditions permettant d'effectuer au mieux les deux opérations, modulation puis adaptation d'impédances, sur des courants lentement variables aussi faibles que possible, en employant un modulateur à redresseurs secs.

Nous avons rejeté les modulateurs du type interrupteur au profit des modulateurs du type inverseur qui ont un rendement quatre fois supérieur. Le modulateur en anneau en est le spécimen le plus connu (*fig.* 1).

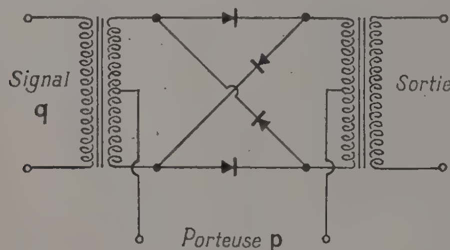


FIG. 1.

On sait que dans ce modulateur, la porteuse bloque et débloque successivement chaque paire de diodes, ouvrant ainsi au signal deux chemins qui lui font parcourir le primaire du transformateur de sortie dans des sens différents. On montre aisément que si le signal a pour fréquence q et la porteuse p, la tension de sortie comprend des termes de fréquences $p - q$, $p + q$, $3p - q$ etc... Mais le bon fonctionnement de l'appareil nécessite une identité des quatre branches du pont pour que la porteuse s'élimine par symétrie et il est bien évident que l'aptitude de l'appareil à moduler des signaux très faibles dépendra du degré d'équilibrage atteint.

Recherche des conditions d'équilibrage. — Dans le cas présent, le signal étant continu ou lentement variable, le transformateur d'entrée doit être remplacé par un potentiomètre. D'autre part, nous avons pensé que l'équilibrage serait simplifié si on éliminait les réactances dans les parties du circuit que parcourt la porteuse. C'est pourquoi nous avons mis un autre potentiomètre à la place du transformateur de sortie, en branchant toutefois ce dernier aux bornes du potentiomètre pour effectuer l'adaptation d'impédances (*fig.* 2).

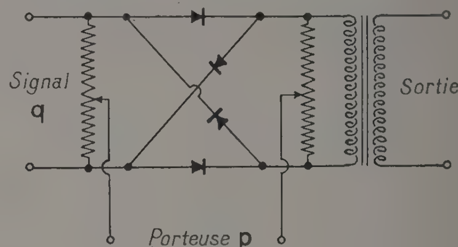


FIG. 2.

Le même souci nous a conduit à rejeter les diodes à oxyde de cuivre dont la capacité atteint 10 000 cm au profit des diodes au germanium dont la capacité n'est que de 1 cm.

Enfin la porteuse a été prise à basse fréquence (50 périodes). A propos des diodes, on remarquera que les plus avantageuses sont celles dont la résistance directe décroît le plus vite avec la tension appliquée, et qui permettent de diminuer la porteuse jusqu'à environ 0,5 volt, et par suite le résidu de porteuse à la sortie.

Si l'on prend ces précautions, l'équilibrage est ramené à un équilibrage de résistances, mais il est encore très difficile à réaliser complètement car les résistances des diodes varient inégalement avec la tension instantanée de la porteuse. Pour obtenir un équilibrage qui persiste tout de même pendant toute la période de la porteuse, on se contente généralement de sélectionner les diodes pour en utiliser quatre dont les caractéristiques sont presque identiques, ce qui donne déjà de bons résultats : par exemple le modulateur Whestinghouse G 500 affaiblit la porteuse de plus de 40 décibels. Pour obtenir un affaiblissement plus grand, une sélection plus poussée des diodes serait illusoire car leurs caractéristiques varient dans le temps et avec la température. Il nous a paru intéressant d'équilibrer un modulateur équipé de quatre diodes quelconques. Ceci est possible si l'on remarque qu'en utilisant une porteuse de forme carrée, la résistance des diodes reste constante ce qui permet de faire un équilibrage pour toute la période de la porteuse. Mais cette possibilité n'est intéressante que si l'on peut utiliser un générateur de signaux carrés

(*) LEROY (J. L.), Diplôme d'études supérieures soutenu à Caen, le 31 mai 1957.

simple : on peut remarquer que les temps de montée des carrés n'ont pas besoin d'être très courts ; la seule condition imposée est que la valeur moyenne de la tension carrée soit nulle. Partant de ces données, nous avons construit un générateur donnant des signaux de 0,5 volt sous 500 ohms avec des temps de montée de 0,4 milliseconde, et constitué simplement par un système à deux redresseurs secs écrêtant une tension de 12 volts à 50 périodes, obtenue à partir du secteur. L'expérience a montré qu'une tension obtenue si simplement donnait des résultats incomparablement supérieurs à ceux que donne une porteuse sinusoïdale généralement utilisée.

Le problème se ramène alors à équilibrer, pour les deux alternances de la porteuse, à l'entrée et à la sortie un circuit en pont dont les branches contiennent quatre résistances différentes. On peut voir que ceci est impossible avec la disposition usuelle du modulateur en anneau (*fig.* 1 et 2). En revanche, si on intervertit le rôle de la porteuse et du signal (*fig.* 3) c'est-à-dire si l'on envoie la porteuse sur AB et le signal sur CD, on peut voir que le système fonctionne toujours comme un inverseur et que les deux potentiomètres placés en E et F permettent d'éliminer toute différence de potentiel due à la porteuse entre C et D (et par suite à la sortie aussi).

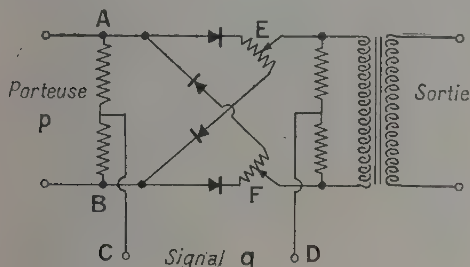


Fig. 3.

Pour améliorer encore l'équilibrage, on s'efforcera d'égaliser les résistances inverses apparentes des diodes en shuntant celles-ci par des résistances de l'ordre du mégohm. Enfin la nouvelle disposition a aussi l'avantage d'avoir une entrée asymétrique, la terre pouvant, par exemple, être mise en C.

Résultats. — Toutes ces précautions réduisent beaucoup le résidu de porteuse à la sortie. On peut améliorer encore le rapport du signal modulé au résidu de porteuse en shuntant le secondaire du transformateur par une capacité qui altère à peine le signal puisqu'il est modulé à basse fréquence, mais fait disparaître divers pics qui se trouvent dans le résidu de porteuse. Un filtrage plus poussé n'est guère avantageux car le signal continu modulé a sensiblement même spectre de fréquences que le résidu de porteuse.

En adoptant les dispositions précédentes nous avons — avec un modulateur équipé de quatre diodes du type O A 74, non sélectionnées — réalisé un affaiblissement de la porteuse de 90 décibels ; le résidu de porteuse était alors équivalent à un signal d'entrée de 30 microvolts environ. Il faut noter que cet équilibrage est d'autant plus instable que les quatre diodes sont différentes. Il varie très vite avec le niveau de la porteuse et aussi avec la température. Cependant si ces deux grandeurs sont stables, le résidu de porteuse est constant et donc beaucoup moins gênant qu'un bruit de fond. Bref, sans précautions spéciales, le modulateur décrit est apte à moduler des signaux supérieurs ou égaux à 0,1 millivolt.

Le fait que — pour les faibles valeurs de la tension porteuse utilisées — la résistance directe des diodes soit de quelques centaines d'ohms, fixe une limite inférieure à l'impédance d'entrée du modulateur. Pour les diodes usuelles cette limite est de l'ordre de 500 ohms, et on choisira une valeur voisine pour l'impédance du primaire du transformateur de sortie. Un blindage au mumétal de ce transformateur est indispensable.

Enfin, les défauts de linéarité du système modulateur-adaptateur sont inférieurs à 1 pour cent pour des signaux de fréquence inférieure à 50 périodes, compris entre 0,1 millivolt et 0,1 volt.

Exemple d'application. — Nous avons utilisé un tel modulateur pour amplifier des courants de très basse fréquence utilisés dans une étude de filtres passe-bas à faible impédance caractéristique coupant à 30 périodes. Ces courants étaient eux-mêmes engendrés par un premier modulateur dans lequel on faisait battre deux tensions à 4 000 périodes, un filtrage ne laissant subsister que la composante à très basse fréquence : deux modulateurs permettent d'isoler une portion de circuit dans laquelle on doit travailler à très basse fréquence, le reste de la chaîne étant constitué d'appareils de laboratoire courants.

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique corpusculaire de la Faculté des Sciences de Caen, sous la direction de M. le professeur Schérer à qui nous tenons à exprimer toute notre gratitude.

Manuscrit reçu le 11 mai 1957.

BIBLIOGRAPHIE

De Groot (F. A.), Haan (P. J.), *Rev. techn. Phillips*, mars 1942, **7**, n° 3.

Tucker (D. G.), *J. inst. electr. Engrs.*, Part III, G. B., 1948 **95**, n° 35.

Tucker (D. G.), *J. brit. inst. radio. Engrs.*, 1955, **15**, n° 4.

Connon (G. L.), *Proc. inst. électr. Engrs.*, Part B., G. B., 1955, **102**, n° 4.

SUPPLÉMENT AU N° 7
TOME 18, JUILLET 1957, PAGE 108 A.

RÉALISATION D'UN MAGNÉTOMÈTRE ET D'UN MESUREUR DE GRADIENT DE CHAMP MAGNÉTIQUE

Par MAURICE SPIGHEL,
Laboratoire de Synthèse Atomique à Ivry.

I. **Principe de l'appareil.** — A)

a) Une bobine est animée d'un mouvement rotatif, oscillant sinusoïdalement dans le temps, autour d'un axe confondu avec un diamètre de la spire centrale : il est induit aux bornes de la bobine une tension proportionnelle à la grandeur de la composante du champ magnétique, perpendiculaire à l'axe et parallèle au plan moyen dans le temps de la spire centrale. Si e est cette tension, H cette compo-

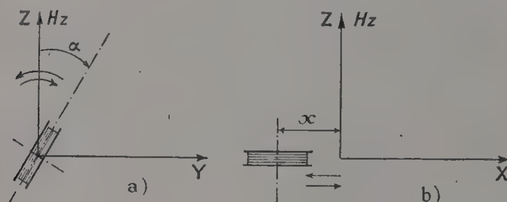


FIG. 1.

sante, S la surface totale des spires de la bobine, ν la fréquence, α_0 l'angle petit de la demi-oscillation (*fig.* 1 a) :

$$e = 10^{-8}.H.S.\alpha_0.2\pi\nu\cos(2\pi\nu t) \quad \text{si} \quad \alpha = \alpha_0\sin(2\pi\nu t). \quad (1)$$

b) Cette formule néglige les harmoniques : cela est justifié par la méthode de mesure portant uniquement sur la fréquence ν. Cette formule n'est valable qu'en supposant le champ identique dans tout le volume de la bobine.

B)

a) Le mouvement linéaire et alternatif d'une bobine dont chaque spire glisse sur son propre plan, induit aux bornes de la bobine une tension proportionnelle à la grandeur du gradient de la composante du champ magnétique perpendiculaire au plan de glissement, gradient pris dans la direction du mouvement (*fig.* 1 b)

$$e = 10^{-8}.S.(\partial H/\partial x_0).x_0.2\pi\nu\cos(2\pi\nu t) \quad \text{si} \quad x = x_0\sin(2\pi\nu t) \quad (2)$$

x_0 est la grandeur du demi déplacement.

b) Les mêmes remarques qu'en A) *b*) sont valables.

II. **Avantage de ce procédé.** — A) Par rapport à une bobine tournante, nous évitons l'opération de collectage avec l'imprécision, la limite de sensibilité, les ennuis d'usure et d'encrassement des balais et collecteurs qu'elle comporte, le bruit de fond inévitable, surtout si l'on travaille avec de petites bobines donnant une tension de quelques microvolts.

B) Ce procédé permet la détermination de la direction du champ par une recherche de maximum.

C) Dans la mesure du champ avec des bobines de dimensions finies, grâce aux caractéristiques des bobines, il est possible d'annuler l'influence des dérivées du champ jusqu'à $\partial^3 H/\partial x^3$ inclus et de négliger les dérivées d'ordre supérieur. On se rapproche des conditions idéales de mesure du champ en un point.

D) Le fait de mesurer H et $\partial H/\partial x$ permet d'établir la topographie du champ avec plus de précision que si l'on ne mesurait que H. La mesure directe de $\partial H/\partial x$, utile en optique électronique évite la différenciation approximative de la fonction expérimentale $H(x)$.

E) Dans un champ trouvé homogène à la précision de mesure de H, seule la mesure directe de $\partial H/\partial x$ permet de trouver le degré d'inhomogénéité.

Remarque. — Le mouvement oscillant et alternatif introduit des vibrations dans l'appareil et dans la sonde. Seul le soin apporté à la réalisation mécanique de l'appareil permet de réduire ces vibrations en bout de sonde à moins de 5/100 mm. Les vibrations propres de la verge tenant la bobine, induites par le mouvement alternatif, ne seraient surtout gênantes que si elles se produisaient à la fréquence ν.

III. **Méthode de mesure.** — On utilise une méthode de zéro : l'indicateur de zéro est un galvanomètre à résonance très sélectif, environ 1/400. La tension alternative de référence aux bornes d'une résistance est fournie par le courant débité par une tension continue à travers un condensateur vibrant mû par l'appareil. La tension alternative est de fréquence et de phase identiques au signal de

mesure : elle est proportionnelle à la tension continue et à la fréquence de vibration. La mesure aura les caractéristiques suivantes :

A) Être indépendante de la fréquence. Les magnétomètres réalisés au C. E. A. ou chez Philips demandaient un amplificateur correcteur de fréquence.

B) La sensibilité de l'appareil ne sera pas limitée par le bruit de fond des résistances ou de l'amplificateur. Par suite du rôle de filtre de notre détecteur de zéro, le rapport signal sur bruit sera excellent. L'utilisation d'un résonateur mécanique, le galvanomètre à résonance, permet une sélectivité qu'aucun dispositif électronique ne peut atteindre à ces fréquences. De plus, il n'y a aucun risque d'induction de secteur.

C) La sensibilité étant augmentée, nous pourrons utiliser des bobines plus petites ; en effet, les méthodes de mesure employées dans les appareils similaires avaient une sensibilité limitée par le bruit de fond de l'appareillage.

D) Cette méthode d'opposition permet de ne pas tenir compte des résistances, self et mutuelle induction des bobines.

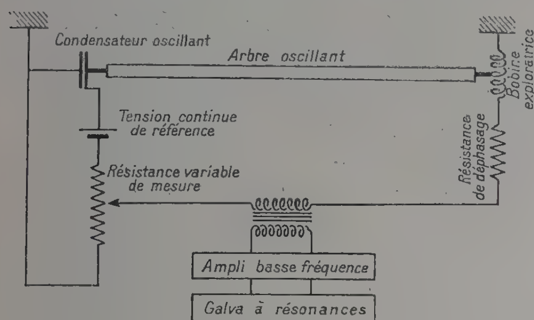


Fig. 2.

E) Comme l'indique la figure schématisant la mesure, la grandeur du champ magnétique mesuré est proportionnelle à la résistance qui rendra l'élongation du galvanomètre à résonance minimum.

Remarque. — La stabilité de l'amplificateur n'a aucune importance.

IV. **Condensateur vibrant.** — C'est un condensateur plan à air, composé de plusieurs lames ; chaque lame est constituée par 4 secteurs.

Comme l'angle de vibration est petit :

$$c = c_0\alpha + c_1 \quad \text{d'où} \quad c = c_0\alpha_0 \sin(2\pi\nu t)$$

en négligeant les harmoniques. Le circuit de référence est constitué par la mise en série d'une source de tension fixe V, du condensateur vibrant et d'une résistance R. La tension aux bornes de cette résistance est :

$$e = RV\, c_0\, \alpha_0\, 2\pi\nu \cos(2\pi\nu t). \qquad (3)$$

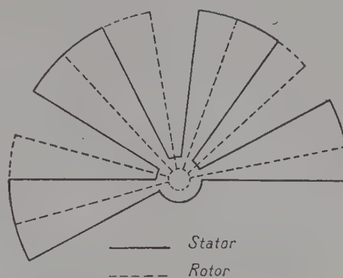


Fig. 3.

Cette forme de condensateur permet d'obtenir un rapport $c_{0\alpha}/c_1$ très grand entre la partie variable et la partie fixe de la capacité. La résistance R est beaucoup plus petite que l'impédance de la capacité vibrante ce qui n'introduit pas de déphasage entre les deux signaux à comparer.

V. **Dimension finie des bobines.** — Soit r le rayon de la gorge intérieure, R le rayon extérieur, L la demi-longueur de la bobine, n le nombre de spires par unité de longueur.

A) Cas de la mesure du champ. — Prenons l'axe des z dans le plan moyen de la spire centrale ; Hz est le champ au centre de la bobine, la tension e dans celle-ci est, en négligeant les harmoniques :

$$\frac{e}{10^{-8}.\alpha_0.\left(2\pi.n^2.L.\frac{R^3-r^3}{3}\right).2\pi\nu\cos(2\pi\nu t)} = Hz\left(1-\frac{\alpha_0^2}{12}\right) + \alpha_0^2\left(\frac{L^2}{3}-\frac{3}{20}\cdot\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}\right) \cdot\left(\frac{\partial^2 Hz}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\partial^2 Hz}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{12}\right) + \alpha_0^4 \ldots \qquad (4)$$

En réalisant la condition :

$$L^2 = (9/20).(R^5-r^5)/(R^3-r^3) \qquad (5)$$

qui se réduit, si $r \ll R$ à $L = 0{,}67\, R$, e sera proportionnel à Hz au centre de la bobine, même si la bobine a des dimensions finies, au 4e ordre près. Il est légitime de négliger les dérivées à partir de l'ordre 4 car elles sont affectées du coefficient α_0^4, $\alpha_0 = 1/10$ dans notre cas.

B) Cas de la mesure de gradient de champ. — Avec des bobines satisfaisant à la condition (5), nous obtenons la valeur :

$$\frac{e}{10^{-8}.x_0.\left(2\pi.n^2.L.\frac{R^3-r^3}{3}\right).2\pi\nu\cos(2\pi\nu t)} = \left(\frac{\partial Hz}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{x_0^2}{2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}\right)\cdot\left(\frac{\partial^3 Hz}{\partial x^3}\right)_0 + \ldots \qquad (6)$$

Il est impossible dans ce cas de mesurer seul $\partial Hz/\partial x$: on a intérêt à prendre des bobines petites, une amplitude de mouvement petite, $x_0^2/2$ et $(3/10).(R^5 - r^5/R^3 - r^3)$ du même ordre de grandeur.

Remarque. — Le calcul donnant les expressions (4) et (6) ne fait intervenir aucune propriété de symétrie du champ magnétique.

VI. **Autres montages possibles.** — A) Mesure du gradient dans un champ axial. — Dans le cas du mouvement linéaire, au lieu de monter la bobine de telle façon que le plan des spires soit parallèle à l'axe du mouvement, on peut monter la bobine perpendiculairement à cet axe. On mesure alors le

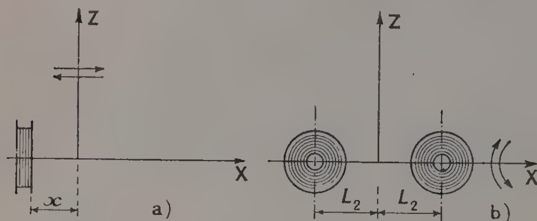


Fig. 4.

gradient de la composante du champ parallèle à l'axe du mouvement, gradient pris dans cette direction (*fig.* 4 a).

$$e = 10^{-8}.S.(\partial H_x/\partial x).x_0.2\pi\nu\cos 2(\pi\nu t). \qquad (7)$$

En satisfaisant à la condition :

$$x_0^2 + 2L^2/3 = (3/10).(R^5 - r^5/R^3 - r^3) \qquad (8)$$

on annule l'influence des dimensions des bobines par l'introduction dans (7) des dérivées successives $\partial^n Hz/\partial x^n$ à partir de l'ordre 5.

Ce montage peut être utilisé dans le cas d'un champ à symétrie axiale donné par des bobines, c'est-à-dire dans le cas des spectrographes β à lentilles.

B) Autre dispositif possible pour la mesure du gradient du champ. — Au lieu de monter une bobine comme dans I A) *a*), on peut monter 2 bobines identiques à la distance l, oscillant autour du même axe confondu avec un diamètre de leurs spires centrales (*fig.* 4 b). La tension e aux bornes des 2 bobines montées en opposition sera, en prenant l'origine sur l'axe des x à égale distance des centres des 2 bobines :

$$e = 10^{-8}.\alpha_0.S.2\pi\nu\cos(2\pi\nu t).l.\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{12}\right)$$
$$\left[\left(\frac{\partial Hz}{\partial x}\right)_0 + \frac{l^2}{24}\frac{\partial^3 Hz}{\partial x^3} + \ldots\right] \qquad (9)$$

avec des bobines satisfaisant à la relation [5]. On peut ainsi mesurer le même gradient de la même composante du champ que dans le montage I B) *a*).

Il est difficile de réaliser 2 bobines identiques : l'identité des surfaces totales S des 2 bobines est vérifiée dans un champ magnétique homogène à la précision désirée. Les 2 bobines ayant chacune $2R = 2$ mm et étant accolées, $l/2$ sera égal à 1 mm. On mesure alors le gradient du champ en un point avec une erreur relative égale à

$$(1/600)(\partial^3 Hz/\partial x^3)[1/(\partial Hz/\partial x)]$$

Ce dispositif est en fait plus pratique que le dispositif I B) car il permet, par une simple commutation, soit utilisant une seule des bobines, soit les mettant en série, de mesurer le champ et le gradient en 2 points distants de 1 mm. Quand on ne se sert que d'une bobine, si on appelle C la capacité entre les 2 bobines, la bobine non utilisée induit alors dans la première une tension telle que

$$\frac{e \text{ induit capacitivement}}{e \text{ à mesurer}} \leqslant 2\pi\nu Cr$$

si r est la résistance d'une bobine.

VII. **Réalisation pratique.** — Un moteur asynchrone synchronisé de 30 watts tournant à 25 tours/sec, entraîne un système bielle manivelle avec une réduction de 4/7.

$$\nu = 14,283 \qquad \alpha_0 = 1/10 \qquad x_0 = 5 \text{ mm}.$$

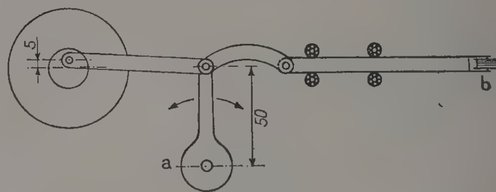


Fig. 5.

Tous les axes tournants ou oscillants sont montés sur roulements ; le glissement est déterminé par 8 roulements. Les bobines sont portées en bout d'une verge 30 cm de longueur hors de l'appareil. Les carters de protection des bobines et verges font 12 mm de diamètre. Les vibrations parasites des bobines, déterminées stroboscopiquement au microscope sont inférieures à 5/100 mm. Les bobines ont comme dimensions :

pour la mesure du champ :

$$2R = 2 \text{ mm} \qquad 2r = 1 \text{ mm} \qquad 2L = 1,4 \text{ mm}$$

pour la mesure du gradient de champ :

$$2R = 4 \text{ mm} \qquad 2r = 2 \text{ mm} \qquad 2L = 2,8 \text{ mm}$$

Le bobinage est réalisé avec du fil de 2/100 à 4/100 mm.

Le condensateur à un $c_{0\alpha}$ de 45 pF et $c_0\alpha/c_1 \neq 1$; avec 180 volts continus et une résistance

de 100 kilo-ohms, la tension alternative de référence est de 0,1 volt.

A l'appareil est adjoint un générateur de 10 impulsions par tour qui permet de contrôler la vitesse avec une échelle de comptage ; la vitesse est stable à 1/1 000 près pour des variations de secteur de 10 %. Si la bobine oscillante a un décentrement u, on introduit dans la formule (1) au lieu de Hz, $Hz + u\,\partial Hz/\partial z$. Comme u est plus petits que 5/100 mm, l'erreur relative est

$$\leqslant (1/5\,000).(1/Hz).(\partial Hz/\partial z).$$

VIII. **Résultats des mesures.** — La précision et la fidélité obtenues dans la mesure de H est de 1/300 d'une centaine de gauss à 10 000 gauss. La précision et la fidélité obtenues dans la mesure du gradient de champ est de 1/50 pour les gradients très forts de l'ordre de 4 000 gauss/cm, et de 1/300 pour les gradients de 500 gauss/cm. On peut mesurer des gradients de 2 gauss/cm à la précision de 1/100. La cartographie d'un champ magnétique peut donc être obtenue avec grande précision. Dans les régions de l'entrefer elle permet de connaître le faible degré d'inhomogénéité. Dans les régions hors de l'entrefer elle permet de connaître la valeur exacte du champ de fuite.

D'après les résultats obtenus, la fidélité et la précision pourraient être améliorées en réduisant l'amplitude du mouvement alternatif linéaire à $x_0 = 1$ mm ou 2 mm, au lieu de $x_0 = 5$ mm, et en ramenant les dimensions de la bobine du gradient de champ à $2R = 2{,}5$ mm au lieu de $2R = 4$ mm ; un meilleur équilibrage dynamique du système bielle-manivelle améliorerait aussi les résultats.

L'appareil a été présenté, dans les conditions actuelles, au Salon de la Physique 1956.

Je tiens à remercier M. le Pr Joliot et M. Suzor, Directeur et Sous-Directeur du Laboratoire pour m'avoir permis de réaliser cet appareil. Je tiens à remercier particulièrement M. Lanfrey, chef de l'atelier du laboratoire, pour l'étude et la réalisation de la partie mécanique de l'appareil ainsi que M. R. Mérinis, électronicien, pour l'étude de la partie électrique de l'appareil.

Manuscrit reçu le 15 avril 1957.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] Cork (J. M.), Shreffler (R. G.) et Shull (F. B.), *Rev. Sc. Instr.*, 1947, **18**, 315.
[2] Chapin (P. M.), *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 945.
[3] Langer (L. M.) et Scott (F. R.), *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 522.
[4] Lamb (W. E., Jr) et Retherford (R. D.), *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 222.
[5] Jürgens (B. F.), *Revue Technique Philips*, tome 14, n° 11.
[6] Taieb (J.), Note C. E. A., n° 28, 1953.
[7] Caldewurt (U. J.) et Adler (S. E.), *Rev. Sc. Instr.*, 1954, **25**.
[8] Gauthier (P.), *J. Physique Rad.*, 1954, **684**, 15.
[9] Frazer (J. F.), *Rev. Sc. Instr.*, 1955, **26**, 475.
[10] Symonds (J. L.), *Rep. Progr. Phys.*, 1955, **18**, 83.
[11] Gauthier (P.), *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **13**, 242, 1707.
[12] Appareil commercial A. E. G., Messwesen.

[10] et [11] donnent les formules de mesure de champ en un point avec une bobine de dimensions finies.

[10] fait une revue générale des méthodes de mesure de champ magnétique.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 7
TOME 18, JUILLET 1957, PAGE 112 A

UN CIRCUIT DE COÏNCIDENCE RAPIDE AVEC UN ANALYSEUR DE TEMPS

Par Ernst RÉMY et Klaus WINTER,
Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire du Collège de France, Paris.

Introduction. — La précision de détermination des énergies de neutrons avec la méthode de temps de vol dépend essentiellement de la qualité du circuit de coïncidence employé. Cette précision est donnée par $\frac{\Delta E}{E} \sim 2\frac{\Delta t}{t}$. Avec un temps de vol de 50 mμs, pour des neutrons de 2 MeV sur un parcours de 1 m, et avec une erreur moyenne de mesure de temps de $\Delta t = 1$ mμs, l'erreur relative de la mesure s'élève à 4 % c'est-à-dire 80 keV. Δt est donné par la résolution et la stabilité du circuit de coïncidence. Les circuits classiques de coïncidence avec une bonne résolution [1] demandent des temps de mesure très longs car chaque intervalle d'énergie d'un spectre doit être mesuré avec un retard correspondant à un temps de vol particulier. Pour raccourcir ces temps de mesure, des circuits chronométriques ont été mis au point récemment, permettant la mesure de tous les différents temps de vol, donc de tout le spectre d'énergie en même temps. Ainsi on améliore la précision des mesures soit parce que la stabilité du circuit est meilleure pendant des intervalles de temps plus courts, soit parce que des intensités plus faibles peuvent être détectées pendant les mêmes temps de mesure. Un tel circuit, le « chronotron » a été réalisé par Keuffel [2]. Un dispositif chronotron plus récent de O'Neill [3] consiste en deux câbles à retard qui sont connectés en dix points équidistants avec des détecteurs de potentiel. Le signal initial et le signal final se propagent dans les deux câbles à retard dans des directions opposées. Le détecteur de potentiel dont le signal de coïncidence est le plus grand indique l'intervalle de temps entre les deux signaux d'entrée.

Un analyseur de temps simple et en même temps plus universel dans ces applications a été construit par Neillson et James [4]. Ils ont employé un seul détecteur de coïncidence de tension qui sort sur un analyseur de temps rapide, dont l'impulsion de sortie est proportionnelle, dans une région au choix, à l'intervalle de temps entre les deux impulsions. Les impulsions peuvent être enregistrées avec un sélecteur d'impulsion. Comme tube dans le détecteur de coïncidence ils ont employé un 6BN6 qui demande des impulsions d'entrée relativement grandes. Ceci limite le temps de résolution propre de l'électronique à environ 10^{-9} s. Dans un schéma amélioré par Warren [5] la 6BN6 a été remplacée par une diode à cristal. La résolution de l'électronique montait alors à 2×10^{-10} s, mais on n'avait réalisé qu'une linéarité entre l'intervalle de temps et la hauteur d'impulsion à la sortie de l'analyseur dans des régions limitées à 2 mμs environ. En outre ils trouvaient une relation entre cette hauteur des impulsions et le taux de comptage des coïncidences.

Le circuit suivant est linéaire dans la région, de 2 à 16 mμs de retard et ne montre pas de relation entre la hauteur d'impulsion et le taux de comptage de coïncidence dans la limite de stabilité.

Dispositif. — La figure 1 montre le schéma en bloc du circuit de coïncidence. Comme détecteur on se servait de deux cristaux de stilbène de 29 mm de diamètre et 16 mm de hauteur collés sur des

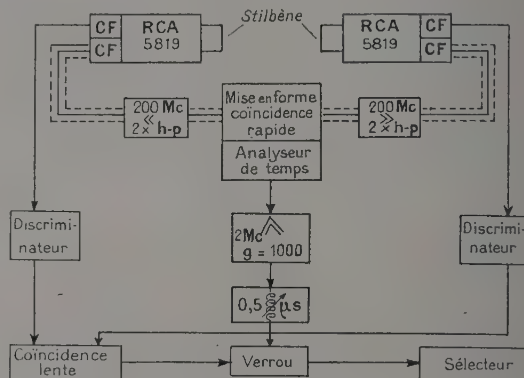


Fig. 1. — Schéma en bloc.

photomultiplicateurs RCA 5819 avec une photocathode convexe. Ce photomultiplicateur montre, parmi toutes les sortes disponibles de 2 inch de diamètre les moindres fluctuations du temps de transit des électrons. D'après les expériences de Smith [6] la différence du temps de transit entre un point au milieu de la photocathode et un point à une distance de 3/8 inch se monte en moyenne à 0,5 mμs. Cette distance correspond à peu près au rayon des cristaux de stilbène employés. En plus le potentiel entre la cathode et la première dynode du photomultiplicateur a été augmenté de moitié par rapport aux normes données par RCA.

Le schéma est composé d'un circuit de coïncidence rapide ($\tau = 1,5 \times 10^{-9}$ s) et lent ($\tau = 4 \times 10^{-7}$ s). Les impulsions de circuit rapide

sortent de l'anode du photomultiplicateur par un cathodefollower (6AK5). Amplifiés dans chaque voie par deux amplificateurs [1] distribués elles sont envoyées à l'étage de coïncidence qui est connecté avec un analyseur de temps. Les impulsions de sortie, étant amplifiées encore une fois, et retardées, sont envoyées à l'entrée d'un verrou. Le circuit lent sort des dixièmes dynodes par des cathodefollowers (6AK5). Ces impulsions passent par des discriminateurs dans le circuit de coïncidences lent, dont l'impulsion de sortie ouvre le verrou, de cette façon les impulsions venant de l'analyseur de temps peuvent être enregistrées par le sélecteur.

Le circuit de coïncidence rapide (fig. 2) correspond au principe qui a été développé par Bell, Graham et Petch [1]. Les impulsions sont coupées à une longueur de 20 mμs par un câble court-circuité (S). En faisant varier la longueur du câble on peut choisir, d'une manière simple, la région de mesure, c'est-à-dire l'intervalle de temps mesurable entre deux impulsions. Le potentiel de la grille du tube T_2 monte, correspondant à la durée de temps de la superposition des deux impulsions [5]. Ayant passé l'étage de l'intégration avec le tube T_2 l'impulsion est transmise par un cathodefollower T_3 à un amplificateur.

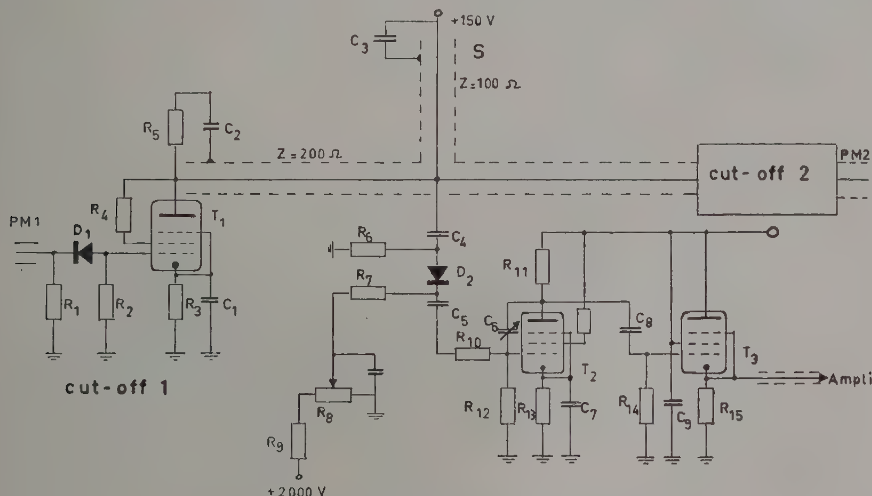


FIG. 2. — Coïncidence rapide et analyseur de temps.

R_1, R_5, R_{13}	= 220 Ω	R_8	= 5 KΩ
R_2	= 2 200 Ω	R_9	= 4 MΩ/2W
R_3	= 100 Ω	R_{10}, R_{11}	= 1 KΩ
R_4	= 12 KΩ	R_{10}, R_{14}	= 100 KΩ
R_6, R_7, R_{12}	= 47 KΩ	R_{15}	= 75 KΩ
C_1	= 40 μF	T_1	= E180F [1]
C_2, C_3, C_9	= 0,01 μF	T_2	= 6AK5
C_4, C_5, C_8	= 470 pF	T_3	= 6AU6
C_6	= 4 — 25 pF	D_1, D_2	= IN82 [1]
C_7	= 30 μF		

Résolution propre et stabilité. — La résolution propre de l'électronique rapide sans photomultiplicateur, a été mesurée avec des impulsions rectangulaires d'un temps de monté de 10^{-9} s et d'une longueur de 100 mμs [2]. Il y avait un retard de 10,8 mμs (10 pieds de câble) entre les deux voies de façon à ce qu'on travaille au milieu de la région linéaire de l'analyseur de temps. La largeur à mi-hauteur de la courbe de résolution (*fig.* 5, C) enregistrée par le sélecteur était de 3×10^{-10} s. La stabilité du dispositif a été éprouvée pendant 12 heures par la position du maximum de cette

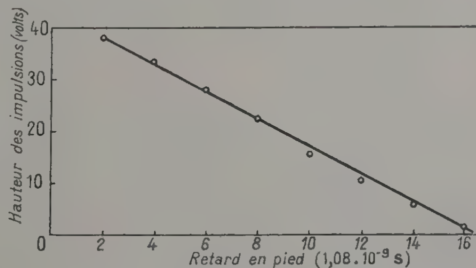


FIG. 3. — Courbe d'étalonnage de l'analyseur de temps, Enregistrée par des courbes de résolution de ^{22}Na. pente $4,07 \times 10^{-10}$ s/V.

(1) Hewlett-Packard, modèle 460A, 200 MHz.
(2) EPIC modèle 200, Electrical and Physical Inc.

courbe de résolution. Le déplacement maximum correspondait à 3×10^{-10} s. La coïncidence rapide, l'analyseur de temps et l'amplificateur suivant, se trouvent dans un thermostat dont la température est constante à 0,2 °C près.

Étage de mise en forme. — La relation entre les impulsions entrantes dans le sélecteur et la hauteur des impulsions à l'entrée des amplificateurs distribués à été étudiée. Une des voies d'entrée était toujours retardée par 10,8 mμs. La figure 4, A

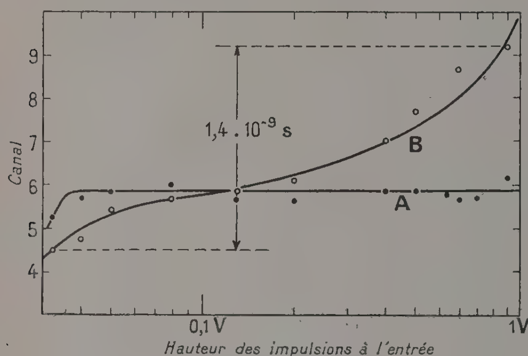


Fig. 4. — Position de maximum de la courbe de résolution propre.
A. Même hauteur des impulsions à l'entrée.
B. Une hauteur fixée à 0,13 V, l'autre variable. Largeur de canal : $3,14 \times 10^{-10}$ s.

montre la position du maximum de la courbe de résolution propre enregistrée par le sélecteur au cas ou les impulsions d'entrées coïncidentes sont variées en hauteur de la même façon. La courbe montre que le dispositif est indépendant de la hauteur des impulsions dès qu'elles dépassent 0,04 V. La courbe B dans la figure 4, a été mesurée avec une hauteur d'impulsions fixée à 0,13 V dans une des deux voies en faisant varier cette hauteur entre 0,032 V et 1 V dans l'autre voie. Dans cette région le maximum de la courbe de résolution propre correspondait à un intervalle de temps de $1,4 \times 10^{-9}$ s. Cet intervalle de temps est introduit par le fait que des impulsions des hauteurs différentes demandent des temps différents pour monter jusqu'au potentiel du cut-off.

Résolution. — La résolution du dispositif a été mesurée avec le rayonnement d'annihilation d'une source de ^{22}Na. La figure 5, A montre la courbe de résolution du circuit rapide, ayant une largeur à mi-hauteur de $3,2 \times 10^{-9}$ s. Cette courbe contient toutes les coïncidences effectuées par des impulsions dépassant 0,04 V à la sortie de photomultiplicateur, entre elles, aussi celles des électrons Compton. La figure 4, B met en évidence que la résolution peut être améliorée de 1,4 mμs environ, si on choisit

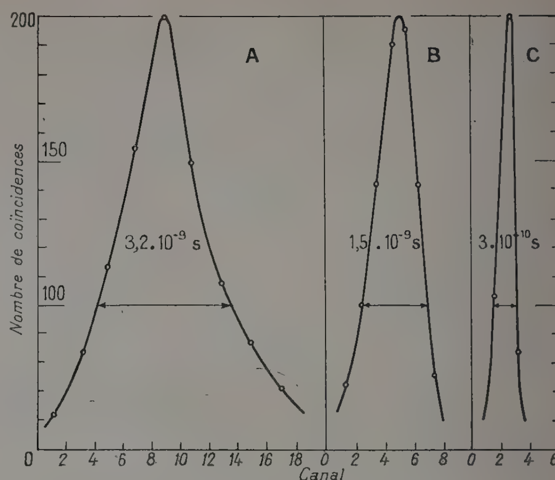


Fig. 5. — Courbes de résolution.
A. Avec ^{22}Na sans circuit lent, largeur de canal $3,32 \times 10^{-10}$ s.
B. Avec ^{22}Na avec circuit lent, largeur de canal $3,32 \times 10^{-10}$ s.
C. Résolution propre de l'électronique, largeur de canal $3,14 \times 10^{-10}$ s.

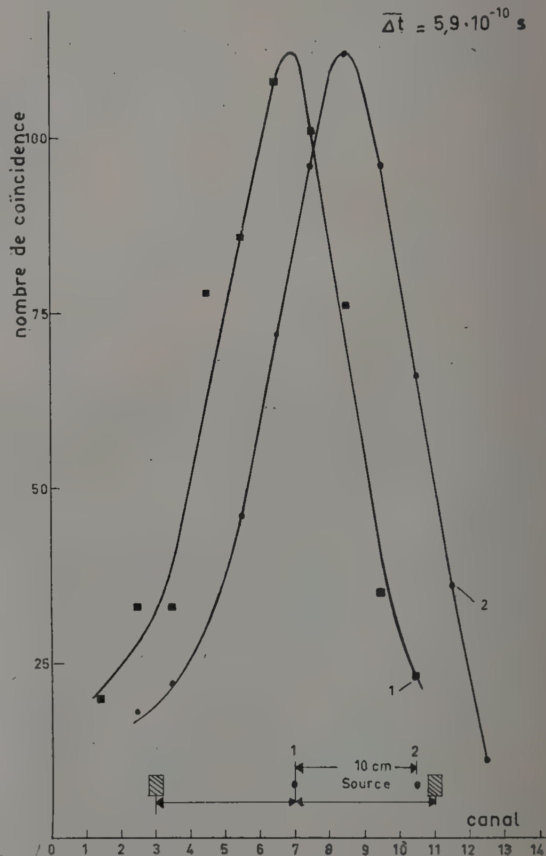


Fig. 6. — Temps de vol de rayons γ.

seulement les coïncidences effectuées par des impulsions de la même hauteur. Cette sélection a été réalisée par les discriminateurs dans le circuit de coïncidences lentes et par le verrou. Ainsi on trouve une courbe de résolution (*fig.* 5, B) avec une largeur à mi-hauteur de $1,5 \times 10^{-9}$ s.

Linéarité. — La figure 3 montre la courbe d'étalonnage de l'analyseur de temps. Les points de mesure sont établis par le déplacement du maximum de la courbe de résolution pour ^{22}Na pour des différents retards fixes. Les retards ont été réalisés par des différentes longueurs de câble introduit entre les amplificateurs distribués et le circuit de coïncidence. On en déduit une pente de la courbe d'étalonnage de $4,07 \times 10^{-10}$ s/V. Entre 0 et 2 mμs de retard la courbe dévie de la linéarité. Mais ceci ne signifie aucun désavantage, car le temps de vol des neutrons de 14 MeV sur un parcours de 50 cm dépasse 2 mμs. Une relation entre la position du maximum de la courbe de résolution et du taux de comptage de coïncidence a été étudiée dans la région de 200-5 000 coïncidences par minute [5]. A la limite de la stabilité du dispositif une telle relation n'a pas été trouvée.

Essais de fonctionnement. — En vue de vérifier le fonctionnement et la précision de l'analyseur, le temps de vol du rayonnement γ sur un parcours de 20 cm a été étudié (*fig.* 6). Les deux détecteurs étaient à une distance de 25 cm. La courbe 1 a été enregistrée avec la source de ^{22}Na dans la position 1 entre les deux détecteurs, la courbe 2 à une distance de 10 cm du centre. La distance moyenne de deux courbes a été extraite d'une moyenne de 8 points à $5,9 \times 10^{-10}$ s. La déviation de la valeur $6,6 \times 10^{-10}$ s correspond à une erreur de 13 %. Cette erreur est comprise dans la région de la stabilité du dispositif.

Remerciements. — Nous présentons nos remerciements respectueux à M. le Pr Francis Perrin pour l'aimable accueil qu'il a bien voulu nous réserver dans son laboratoire.

Nous remercions également M. Claude Magnan, Sous-Directeur du laboratoire, pour son aide efficace et pour les fructueuses discussions que nous avons eues ensemble.

Nous remercions également le « Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft » (E. R.) et le C. E. A. (K. W.) pour les bourses qu'ils nous ont attribuées.

Manuscrit reçu le 31 mai 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bell (R. E.), Graham (R. L.) et Petch (H. E.), *Canad. J. Phys.*, 1952, **30**, 35.
[2] Keuffel (J. W.), *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 197.
[3] O'Neill (G. K.), *Rev. Sc. Instr.*, 1955, **26**, 285.
[4] Neilson (G. C.) et James (D. B.), *Rev. Sc. Instr.*, 1955, **26**, 1018.
[5] Jones (G.) et Warren (J. B.), *J. Sc. Instr.*, 1956, **33**, 429.
[6] Smith (R. V.), *Westinghouse Research Lab.*, 1956, 60-94511-6-P6.

LETTRE A LA RÉDACTION

REMARQUES SUR LE FONCTIONNEMENT DE RELAIS MÉCANO-ÉLECTRIQUES

Par Mlle M. Chenot,
École Normale Supérieure des Jeunes Filles, Paris.

Une décharge en haute fréquence dans un tube à gaz raréfié peut faire apparaître une tension continue entre deux électrodes internes plongées dans le gaz ionisé [1]. La grandeur et le sens de la force électromotrice ainsi engendrée dépendent de la position des électrodes internes par rapport aux électrodes externes d'excitation. Si l'on établit une liaison entre l'une des électrodes externes et un système mécanique animé de petits mouvements, ces derniers se traduisent par la production d'une tension variable qui peut servir à les mesurer ou à actionner un relais. Des applications de ce genre ont été décrites par K. S. Lion et ses collaborateurs [2], [3].

J'ai montré récemment que les caractères du phénomène étaient en relation avec les courbes de potentiel explosif et de potentiel d'entretien minimum de la décharge, dans les différentes régions du tube correspondant aux intervalles délimités par les électrodes successives. Des considérations analogues peuvent rendre compte de l'existence des positions critiques des électrodes qui assurent de grandes valeurs de la force électromotrice du tube. La discussion est particulièrement facile avec le dispositif de Rohde [5], repris par K. S. Lion [3] et représenté sur la figure 1 (*a*). Le générateur maintient entre ses bornes une différence de potentiel H. F. constante U. Lorsque l'électrode D est à égale distance de A et B, la courbe de potentiel d'entretient minimum de la décharge est la même pour chaque moitié du tube, c'est la courbe S_0. Le point de fonctionnement M dans le diagramme p, U correspond à une pression P et une tension d'excitation U_{ex}. Il y a symétrie et la force électromotrice E_0 est nulle. Si l'électrode D se rapproche de A, il correspond à la

région AD une courbe S_{1i} qui se déplace vers les pressions plus élevées et les tensions plus faibles, tandis que la région BD se rapporte à une courbe S_{2i} se déplaçant en sens inverse (*fig.* 1 (*b*)). Il est bien entendu que les deux courbes ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, en raison des phénomènes de diffusion entre les deux régions. Pendant le déplacement de D, la

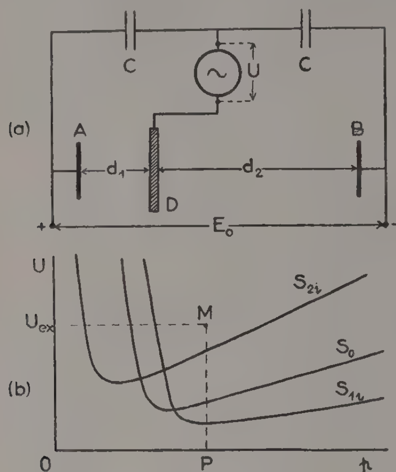


Fig. 1.
Fig. (*a*) d'après Rohde et Lion.

capacité C_a entre A et D augmente ; mais, si l'ionisation du gaz augmente, elle provoque en même temps une diminution de C_a. De toute façon, si la capacité C est très supérieure à C_a, les variations de C_a n'ont guère d'influence sur la tension U_{ex} qui reste voisine de U. Le point de fonctionnement demeure sensiblement le point M ; mais la droite PM est de plus en plus voisine du minimum de la courbe S_{1i} correspondante, en même temps qu'elle s'éloigne du minimum de la courbe S_{2i} ; l'ionisation devient plus intense entre A et D qu'entre B et D, l'électrode A devient pôle positif du tube. Le déplacement de D se poursuivant, la dissymétrie s'accentue, jusqu'au moment où l'une des courbes atteint le point M ; ce peut être la branche droite de la courbe S_{2i}, comme dans certaines expériences de Lion où la décharge se détache brusquement de l'électrode B [2] ; mais ce pourrait être aussi la branche gauche de la courbe S_{1i}. Dans les deux cas, on doit observer une chute rapide de la tension continue E_0 ; on retrouve qualitativement l'allure de la courbe de E_0 en fonction de la distance d_1 publiée par Lion. Les phénomènes seraient plus compliqués à suivre avec d'autres dispositions d'électrodes, mais le sens de l'interprétation doit être le même.

Dans un montage avec capacité (*fig.* 2(*a*)) également décrit par Lion [2], les variations de E_0 sont aussi faciles à prévoir. Les capacités C_1 et C_2 sont ici de même ordre que les capacités entre électrodes. Supposons l'électrode D au milieu de AB, le générateur fournissant une tension U constante. Maintenons la capacité C_2 constante ; la différence de potentiel U_2 entre B et D reste constante, le point de fonctionnement M_2 est fixe (*fig.* 2(*b*)). Faisons varier C_1 entre une petite valeur et une valeur élevée ; l'impédance correspondante varie en sens inverse et la différence de potentiel U_1 entre A et D augmente constamment de 0 à U, le point M_1 se déplace sur la droite PM_2. Soit alors S_0 la courbe de potentiel d'entretien minimum

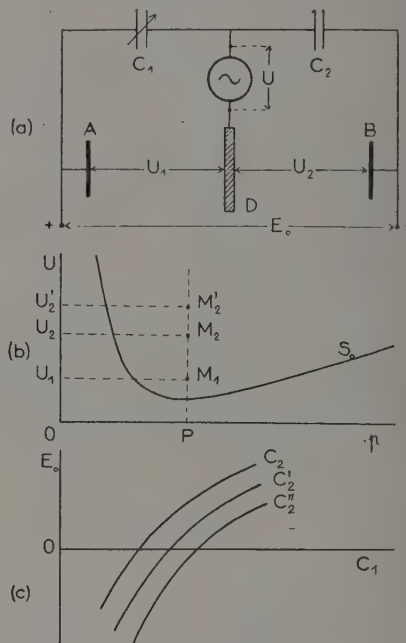


Fig. 2.
Fig. (*a*) et (*c*) d'après Lion.

pour les deux moitiés du tube lorsque les capacités C_1 et C_2 sont égales. Pour des variations assez réduites de C_1, donc de U_1 par rapport à U_2, on peut admettre en première approximation que cette courbe reste valable pour les deux parties du tube malgré les intensités d'ionisation différentes. Quand le point M_1 est au-dessous de M_2, la tension E_0 est négative ; elle s'annule lorsqu'il arrive en M_2 et devient positive quand il passe au-dessus de M_2, suivant la courbe de E_0 en fonction de C_1 donnée par Lion (*fig.* 2(*c*)). Pour une valeur plus grande de C_2, par exemple C_2', le point fixe devient M_2', la courbe de E_0 s'abaisse ; évidemment elle coupe toujours l'axe des C_1 au point $C_1 = C_2$.

Une telle représentation est assez schématique, mais elle permet de suivre aisément l'allure des phénomènes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chenot (Mlle M.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 842.
[2] Lion (K. S.) et Sheetz (J. W.), *U. S. Patents*, 7 décembre 1954, nos 2 696 584 et 2 696 566.
[3] Lion (K. S.), *Rev. Sc. Instr.*, 1956, **27**, 222.
[4] Chenot (Mlle M.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 395.
[5] Rohde (L.), *Ann. Physik*, 1932, **12**, 569.

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Étude des sels fondus par diffraction des rayons X aux températures élevées. I. Structure à l'état liquide des fluorures LiF, NaF et KF, par J. ZARZYCKI, Centre des Recherches des Glaceries de Saint-Gobain, France (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 65 A). — L'analyse des courbes de distribution radiale déduites des spectres de diffraction X au moyen de la transformée radiale de Fourier conduit aux deux constatations suivantes : 1. La *série* des premières distances interatomiques du cristal (ordre à courte distance) est conservée à l'état liquide. 2. Les nombres de coordination relatifs à l'état fondu sont *notablement inférieurs* à ceux relatifs à l'état solide. Ceci suffit pour prouver que la structure des fluorures fondus est de nature essentiellement *lacunaire*. On trouve en même temps l'explication de la très forte expansion observée lors de la fusion de ces sels. Ce travail apporte, semble-t-il, la première preuve expérimentale directe de la formation de « trous » dans le milieu sel fondu.

L'influence de la température de l'enceinte sur la sensibilité du manomètre thermique, par M. VARICAK, Institut de Physique de la Faculté des Sciences et Institut Rudjer-Boskovic, Zagreb, Yougoslavie *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 70 A). — La possibilité d'augmenter la sensibilité des jauges à vide des thermistances en abaissant la température de la paroi est examinée théoriquement et expérimentalement. Les résultats obtenus montrent que l'abaissement de la température, tout en augmentant la sensibilité de la jauge, la rend trop inerte pour qu'elle soit utilisable en pratique.

Calcul de l'induction et de ses dérivées sur l'axe d'une lentille électronique magnétique de révolution, par M. LAUDET, Faculté des Sciences de Toulouse (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 73 A). — On montre comment il est possible, à partir de la mesure du flux d'induction de déterminer, par de simples produits matriciels, les valeurs de l'induction B et de ses dérivées B′ et B″, ... sur l'axe des lentilles électroniques magnétiques de révolution. On donne ensuite les valeurs numériques des « matrices élémentaires » et l'on applique la méthode au cas de la spire circulaire dont les expressions analytiques de l'induction et de ses dérivées sont connues. On a ainsi une idée exacte de la précision des résultats auxquels on est conduit. On souligne enfin l'intérêt pratique de cette méthode qui permet de mesurer B, B′ et B″ avec une sonde unique à un seul enroulement et dont le diamètre n'est limité que par celui du canal des pièces polaires des lentilles utilisées.

Méthode de mesure propre au radiocarbonne 14, par M[lle] Sonia APELGOT, Laboratoire Curie, Institut du Radium (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 78 A). — Dans ce mémoire, on rappelle les difficultés expérimentales rencontrées pour marquer avec une grande activité spécifique, des molécules à intérêt biologique, lorsque le traceur est le radiocarbone 14. On analyse également les raisons pour lesquelles les activités spécifiques faibles sont un obstacle majeur dans les applications du radiocarbone 14 à divers problèmes biologiques, si l'appareil de mesure reste le compteur cloche Geiger-Müller à fenêtre de mica. Pour pallier à ces difficultés, il devient nécessaire d'utiliser un appareildemesure plus efficace, comme le compteur Geiger-Müller à gaz carbonique.

L'article comprend deux parties : d'une part l'attaque argento-sulfo-chromique qui transforme un échantillon biologique ou organique quelconque (liquide ou solide) en carbonate de baryum ; d'autre part la méthode de mesure de la radioactivité dans un compteur à gaz carbonique seul. Le compteur décrit ayant un volume de 200 cm^3 permet de connaître par une seule mesure la radioactivité contenue dans un organe de 380 mg environ (poids frais). Pour mettre en évidence l'amélioration prévue théoriquement, on décrit deux expériences biologiques parallèles; on utilise le compteur cloche classique dans l'une et le compteur à gaz carbonique dans l'autre.

La détermination des surfaces et des interfaces spécifiques par diffusion centrale du rayonnement X. I. Fondements théoriques, par J. L. SOULÉ, Centre d'Études et Recherches des Charbonnages de France, Verneuil-en-Halatte (Oise) (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 90 A). — L'auteur reprend d'abord la théorie générale en établissant d'une façon systématique différentes expressions équivalentes que l'on peut donner de la formule fondamentale ; il peut ainsi, par application immédiate : faire intervenir la loi de répartition de l'intensité dans le faisceau primaire, établir les propriétés des principales grandeurs typiques d'un diagramme quelconque, considérer l'effet de la diffusion multiple. Puis il étudie les propriétés caractéristiques des diagrammes relatifs aux structures présentant une interface définie et relie le comportement asymptotique de la loi de diffusion vers les grands angles (en diffusion simple ou multiple) à une « discontinuité spécifique » de la substance (produit de l'interface spécifique par le carré moyen du saut de densité). Enfin, il rassemble quelques formules relatives aux systèmes dilués ou concentrés de particules, et qui permettent de rattacher les grandeurs typiques à des « diamètres moyens ».

ABSTRACTS OF THE PAPERS

Method of measurement suitable for radiocarbon 14, by Miss Sonia Apelgot, Laboratoire Curie, Institut du Radium, (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 78 A). — In this paper, the experimental difficulties encountered in labelling molecules of biological interest with a high specific activity, when radiocarbon 14 is the tracer, are reviewed.

The fact that a low specific activity is a major drawback to the application of radiocarbon 14 to various biological problems is analysed, when the measuring device is a Geiger-Müller counter with a thin mica window.

To avoid these difficulties a more efficient measuring apparatus is required, such as a Geiger-Müller counter with carbon dioxide. This paper includes two main subjects :

1) The silver-sulphonic-chromic reaction which transforms any biological or organic sample (liquid or solid) into barium carbonate.

2) The radioactivity measurement by means of a counter with carbon dioxide. With the counter described, which has a volume of 200 cm^3, it is possible to determine the radioactivity of an organ weighing 380 mg (weight of fresh tissue) with only one measurement.

To emphasize the improvement obtained, two parallel biological experiments are described : in the first one, the usual Geiger-Müller counter is used and in the second the carbon dioxide counter.

The determination of specific surfaces and interfaces by small angle scattering of X-rays. I. Theorical principles, by J. L. Soulé, Centre d'Études et Recherches des Charbonnages de France, Verneuil-en-Halatte (Oise) (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 90 A). — First, the author goes back to the general theory, deriving systematically different equivalent expressions for the fundamental equation ; an immediate application makes it possible to take into account the law of distribution of the intensity in the primary beam to obtain the properties of the principal typical parameters of any diagram to consider the effect of multiple scattering. He then investigates the characteristic features of the diagrams relative to structures with a defined interface and relates the asymptotical behaviour of the scattering law at large angles (in the case of simple or multiple scattering) to one " specific discontinuity " of the sample (specific interface multiplied by the mean square of the change of density at the points of discontinuity). Finally some equations are presented concerning dilute and dense systems of particles, which enable one to relate the typical parameters to " mean diameters ".

High-temperature X-ray diffraction study of molten Salts. — I. Structure of fluorides LiF, NaF and KF in liquid state, by J. Zarzycki, Centre de Recherches des Glaceries de Saint-Gobain (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 65 A). — The analysis of the radial distribution curves deduced by spherical Fourier transform from the X-ray diffraction spectra of liquid fluorides shows two fundamental facts :

1. — The *series* of first interatomic distances of the crystal (low-range order) is conserved in the liquid state.

2. — The coordination numbers of the crystal undergo a *very pronounced decrease* in the liquid state.

This is enough to prove that the structure of molten fluorides is essentially *lacunar* in nature. It also explains the very high expansion observed on melting of these salts. It is believed that this work provides the first direct experimental proof of the formation of " holes " in molten salts.

Influence of the wall temperature on the sensitivity of the thermal manometer, by M. Varicak, Institut de Physique de la Faculté des Sciences et Institut Rudjer-Boskovic, Zagreb, Yougoslavie (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 70 A). — The possibility of incresing the sensitivity of thermistor vacuum gauges by lowering the wall temperature is theoretically and experimentally studied. The results show that temperature lowering, though increasing the sensitivity of the gauge, make it too inert to be usefull in practice.

Method of calculating the flux density and its derivatives on the axis of a magnetic electron lens with axial symmetry, by M. Laudet, Faculté des Sciences de Toulouse (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 73 A). — It is shown how it is possible to calculate the values of the flux density B and of its derivatives B′ and B″, ... on the axis of a magnetic electron ens with rotational symmetry after measuring the flux density with simple matrix products. The numerical values are then given for the " elementary matrices " and the method is applied to the case of a circular current whose mathematical expressions of the flux density and its derivatives are already known. One has, this way, a precise idea of the accuracy of the results obtained. Finally stress is lied on the practical interest of this method which allows measurement of B, B′ and B″ with one search coil having only one winding, the diameter of which is limited only by that of the bore of the pole pieces of the lens used.

L'extrême faiblesse des prises maximum tolérables des radionuclides rend inefficaces les appareils de détection de rayonnements actuels, par Pierre-Octave Robert, Professeur Agrégé de Physique (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 103 A). — Les prises maximum tolérables des divers radionuclides pratiquement dangereux dans l'industrie nucléaire et correspondant à la dose de 150 rem admise pour la durée d'une vie de 70 ans, varient entre $1{,}4 \times 10^{-13}$ mg et 1,21 mg. Les appareils de détection actuels de rayonnement ne sont pas adaptés à ce problème. L'utilisation de masques opérant un filtrage rigoureux des poussières s'impose.

La modulation des courants continus par modulateur en anneau, par J. L. Leroy et C. Mabboux, Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences de Caen (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 106 A). — Pour moduler les courants continus en vue de leur amplification, on peut utiliser un modulateur inverseur à redresseurs secs. On élimine la porteuse en équilibrant le modulateur, ce qui peut être fait avec une précision suffisante pour que l'appareil puisse être utilisé avec des signaux d'entrée de 0,1 millivolt sous 500 ohms.

Réalisation d'un magnétomètre et d'un mesureur de gradient de champ magnétique, par Maurice Spighel, Laboratoire de Synthèse Atomique à Ivry (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 108 A). — Pour établir la topographie du champ magnétique dans un spectrographe à secteur, nous avons réalisé un magnétomètre avec une bobine à mouvement rotatif oscillant et un mesureur de gradient de champ magnétique avec une bobine à mouvement linéaire alternatif.

1° Pour utiliser une méthode de zéro, une tension alternative, de fréquence et de phase identiques à celle du signal induit dans les bobines, est produite au moyen d'un condensateur oscillant monté sur le même arbre que les bobines. La comparaison est indépendante de la fréquence et de l'amplitude du mouvement car les deux tensions à opposer sont de grandeurs proportionnelles à cette fréquence et à cette amplitude.

2° La mesure du champ en un point au moyen d'une bobine de dimension finie introduit les dérivées successives du champ $\frac{\partial^n H}{\partial x^n}$. Les caractéristiques géométriques des bobines utilisées sont telles que nous annulons les dérivées jusqu'à $\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}$ inclusivement. De cette façon, même en champ inhomogène, nous nous rapprochons le mieux des conditions de mesure du champ magnétique en un point.

Un circuit de coïncidence rapide avec un analyseur de temps, par Ernst Rémy et Klaus Winter, Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire du Collège de France, Paris (*J. Physique Rad.*, **18**, 112 A). — Un circuit de coïncidence rapide avec analyseur de temps est décrit, prévu pour des mesures de temps de vol des neutrons rapides. La résolution propre de l'électronique est 3×10^{-10} s. La largeur à mi-hauteur de la courbe de résolution pour ^{22}Na est $1{,}5 \times 10^{-9}$ s. La relation entre la hauteur des impulsions à la sortie de l'analyseur de temps et l'intervalle de temps entre les impulsions d'entrée est linéaire dans la région de 2-16 mμ s.

Design of a magnetometer and of a magnetic field-gradient meter, by M. Spighel, Laboratoire de synthèse atomique, Ivry (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 108 A). — For the measurement of the magnetic field and magnetic field-gradient in a spectrograph, the author has build a magnetometer with an oscillating rotative coil and a linearly vibrating coil.

1) In order to allow a zero-method, a reference alternating potential, with phasie and frequency identical to the signal induced in the coils, is produced by an oscillating condenser mounted on the same axis as the coils. The measurement is thus independant of frequency and amplitude because the two opposite potentials are both proportional to this frequency and amplitude.

2) The measurement of a point field requires the knowledge of the successive derivatives of $\frac{\partial^n H}{\partial x^n}$. The geometrical characteristics of the coils is such that all derivatives up to $\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}$ inclusive are null. Even in an inhomogenous field the best conditions are approached for the measurement of a point magnetic field.

The extrême smallness of the maximum permissible intake of radionuclides makes present radiation detectors useless, by Pierre-Octave Robert, Professeur Agrégé de Physique (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 103 A). — The maximum permissible intake of the various radionuclides that present pratical danger in the nuclear industries and correspond to an amount of 150 rem accepted for a life-span of 70 years varies from 1.4×10^{-13} mg to 1.21 mg. The present radiation detectors are not adapted to this specific problem. The use of masks providing a rigourous filtering of dusts is imperative.

A fast coincidence circuit with time-sorter, by Ernst Rèmy and Klaus Winter, Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire du Collège de France, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 112 A). — A fast coincidence circuit and time-sorter will be described, designed for time-of-flight measurements of fast neutrons. The inherent time resolution of the electronic is 3×10^{-10} s. The full width at half maximum of the ^{22}Na time resolution curve is $1{,}5 \times 10^{-9}$ s. The dependence of pulse height at the output of the time sorter from time difference of input pulses is linear in the region of 2-16 mμ s.

Modulation of direct currents by a ring modulator, by J. L. Leroy and C. Mabboux, Faculté des Sciences de Caen (*J. Physique Rad.*, 1958, **18**, 106 A). — The modulation of direct currents, before their amplification, may be made by a ring modulator using crystal rectifiers. The carrier leak is considerably reduced by balancing the modulator so that it is possible to modulate imput signals of 0,1 millivolt at low impedance (500 ohms).

Le Gérant : Maurice Blondin. — Dépôt légal : 3e trim. 1957. — Imp. Taffin-Lefort, à Lille (France).

TOME 18 SUPPLÉMENT AU N° 12 DÉCEMBRE 1957

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

PHYSIQUE APPLIQUÉE

STRUCTURE TOPOLOGIQUE DE L'ÉQUATION DE M. LIÉNARD

Par M. N. MINORSKY,

Domaine de l'Arc, Aix-en-Provence.

1. **Introduction.** — Dans une note intitulée « Sur l'espace paramétrique de l'équation de M. Liénard» insérée dans les *Comptes Rendus*, 1955, **240,** 1508, il a été montré qu'en introduisant la notion de *l'espace paramétrique* et en appliquant la méthode stroboscopique, on peut compléter les résultats connus concernant l'existence de solutions périodiques de l'équation de Liénard, par une étude topologique de ces solutions.

Dans ce mémoire nous nous proposons d'étudier ces questions plus en détail en précisant surtout leur relation par rapport à la théorie de bifurcations de Poincaré [1] qui a trouvé un grand nombre d'applications particulièrement dans les travaux de savants russes.

Malheureusement l'étude directe de ces questions, basée sur la théorie « des conséquents » de Poincaré, s'est avérée assez difficile pour des raisons bien connues et, à part le problème de la bifurcation d'un cycle limite d'un foyer, résolue complètement par Andronov [2], peu de progrès ont été accomplis dans cette voie.

On peut, toutefois, éviter ces difficultés grâce à l'emploi de la méthode stroboscopique en se bornant à la première approximation qui est toujours utilisable dans les applications si le système est du genre « presque-linéaire » comme la plupart des problèmes physiques qui n'ont pas le caractère de « problèmes de relaxation ».

Dans des problèmes autres que ces derniers, la question de bifurcations se réduit généralement aux simples questions d'algèbre, comme nous allons le montrer dans la suite.

Les problèmes de ce genre ont aussi un caractère physique bien défini, à savoir ; étudier comment la variation de la caractéristique non-linéaire réagit sur le comportement de l'oscillation auto-entretenue ?

Pour le moment ce problème n'a pas encore été résolu du point de vue expérimental car on ne sait pas encore comment on peut produire une caractéristique non-linéaire donnée à l'avance et, d'autant moins, comment la faire varier en fonction d'un paramètre.

Si, toutefois, ce *problème de synthèse* est un jour résolu, il sera possible de produire des phénomènes oscillatoires bien déterminés au lieu de les étudier avec des caractéristiques non linéaires données plus ou moins au hasard.

Vu ces possibilités, il semble utile d'aborder une étude systématique de ces questions.

Dans la section 2 nous introduirons certaines conventions qui permettront d'utiliser un langage plus condensé et, dans les sections suivantes, nous développerons une série de conclusions résultant de l'application de la méthode stroboscopique à l'équation de Liénard.

Dans la dernière section nous toucherons la question de *l'amortissement variable* et indiquerons une relation entre cette question et les résultats topologiques concernant l'étude de l'équation de Liénard qui forme le sujet principal de ce mémoire.

2. **Nature de bifurcations.** — Nous supposerons connus les éléments topologiques de la théorie de Poincaré [3]. Il suffit de rappeler brièvement quelques conclusions de cette théorie qui seront utiles dans la suite.

Une courbe intégrale fermée (le cycle limite) a toujours dans son intérieur au moins un point

singulier dont la stabilité est opposée à celle du cycle limite (nous dirons simplement : cycle). Ainsi un cycle stable a dans son intérieur un point singulier instable et *vice versa*.

Parmi les structures topologiques qu'on rencontre le plus souvent dans les applications se trouvent les *structures concentriques*. Comme, en outre, dans la théorie de la première approximation, un cycle se présente comme un cercle, la structure en question est tout simplement un certain nombre de cercles concentriques avec le point singulier au centre de la configuration. La propriété essentielle d'une pareille configuration est en ce que les stabilités de cycles sont toujours alternées, le point singulier au centre étant considéré comme un cycle réduit à un seul point.

Il est commode de désigner des configurations de ce genre par une suite de lettres S (stable) et I (instable), la première lettre dans la suite se rapportant toujours à la stabilité du point singulier et les lettres suivantes aux stabilités de cycles successifs (du centre vers l'extérieur).

Ainsi, par exemple, la notation : IS équivaut à la phrase : « un point singulier instable est entouré par un cycle stable » et ainsi de suite.

Dans l'étude de l'équation de Liénard nous n'allons pas rencontrer plus de trois lettres mais, comme la première se rapporte toujours au point singulier, il n'y aura que deux cycles au maximum mais, il peut y avoir un ou pas de cycles du tout. De cette façon nous pouvons établir la classification suivante :

ISI ou bien SIS : configuration bicyclique ;
IS ou bien SI : configuration monocyclique ;
I ou bien S : configuration acyclique.

Il y aura d'ailleurs quelques précisions à faire à ce sujet dans la suite.

De même, configurations ISIS ou bien SISI sont des configurations tricycliques et ainsi de suite.

Nous appellerons « cyclicité » le nombre de cycles dans une configuration. Ainsi, s'il y a n lettres dans la suite SISI ... SI, la cyclicité est $(n - 1)$.

Avec ces notations nous pouvons énoncer les résultats connus de la théorie des bifurcations.

(1) Bifurcations du premier genre. — On sait [2] que les bifurcations de ce genre ont lieu selon le schéma

Point singulier stable ↗ Point singulier instable / ↘ Cycle stable (I)

On peut envisager bien entendu les bifurcations *inverses* du même genre soit en changeant la direction des flèches dans (I), soit en remplaçant le mot « stable » par le mot « instable ». Selon notre convention, la bifurcation (I) sera : S → IS ou bien SI → I et ainsi de suite.

Si l'on a une configuration polycyclique, par exemple SISIS, là bifurcation (I) sera :

(S) ISIS → (IS) ISIS

ou le symbole ( ) indique les éléments sujets à la bifurcation ; dans la suite nous n'indiquerons plus ce symbole une fois qu'une certaine habitude de ces notations sera acquise.

En résumé : *la bifurcation (I) change la configuration au centre et aboutit à un changement de cyclicité d'une unité.*

(2) Bifurcations du deuxième genre. — Ces bifurcations ont lieu quand les deux cycles voisins, l'un stable et l'autre instable, s'approchent indéfiniment quand le paramètre varie et, pour une certaine valeur critique ou *de bifurcation* du paramètre se confondent à la limite donnant lieu à un *cycle semi-stable* qui disparaît ensuite si le paramètre continue à varier dans le même sens. Cette bifurcation (II) *modifie toujours la configuration dans son intérieur et aboutit à un changement de cyclicité de deux unités.*

Poincaré dit à ce sujet : « les solutions périodiques (cycles) apparaissent (ou disparaissent) par couples à la façon de racines réelles d'une équation algébrique », [4] nous préciserons ce fait plus loin.

Dans ces notations la birfucation (II) se présente par exemple dans le schéma :

ISIS → I(SI) S → IS

ou par le symbole ( ) nous indiquons les éléments sujets à la bifurcation ; dans ce cas (SI) est un cycle semi-stable qui, par sa nature, est une *structure critique*,

(3) Bifurcations du troisième genre. — Ces bifurcations, apparemment, n'ont pas été constatées jusqu'à présent ; nous les trouverons dans la suite où elles apparaissent logiquement dans l'étude de la topologie de l'équation de Liénard.

Ces bifurcations sont caractérisées soit par l'addition, soit par la soustraction d'*un cycle extérieur* de la configuration qui existait *avant* la bifurcation.

Les schémas suivant sont des exemples de bifurcations (III)

S → S(I) → SI ; I → I(S) → IS ; IS → IS(I) → ISI.

Ces éléments de la théorie de bifurcations étant rappelés, avec les notations définies dans cette section nous abordons la partie principale de notre problème.

3. **Équation de M. Liénard.** — Nous allons étudier l'équation différentielle (e. d., pour abréger) de M. Liénard sous sa forme habituelle

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + x = 0. \qquad (3.1)$$

Dans les applications la fonction $f(x)$ est repré-

sentée toujours par un polynôme, tel que :

$$f(x) = a + cx^2 + ex^4 \qquad (3.2)$$

où les coefficients a, c et e sont des petits nombres du même ordre de grandeur si l'on veut rester dans le cadre de la théorie classique (de Poincaré) ce que nous supposerons dans la suite.

Remarquons que la forme (3.2) est la plus souvent rencontrée dans les applications ; elle apparaît chaque fois que la caractéristique non linéaire est donnée par un polynôme du 5e degré.

La caractéristique peut être donnée par une relation cubique ($e = 0$) comme cela arrive par exemple au cas de l'e. d. de van der Pol qui correspond à ce qu'on appelle quelquefois «l'excitation molle» (« soft self excitation »), la forme (3.2) caractérisant « l'excitation dure » (hard self-excitation).

Comme la dérivation de l'équation de Liénard à partir, par exemple, d'un circuit électronique, est bien connue, nous ne nous arrêterons pas à cette question et remarquerons seulement que $f(x)$ ne contient que des termes pairs en x^2, x^4 etc., les termes impairs disparaissant dans les intégrations.

Notre point de départ sera ainsi l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4)\,\dot{x} + x = 0 \qquad (3.4)$$

à laquelle nous allons appliquer la transformation stroboscopique. Rappelons brièvement ce procédé. On représente (3.4) par un système équivalent en posant $\dot{x} = y$; puis on introduit de nouvelles variables ρ et ψ définies par les relations

$$\rho = r^2 = x^2 + \dot{x}^2 = x^2 + y^2 ; \quad \psi = \text{arc tan}\,(y/x) ;$$

ceci s'obtient à l'aide de deux identités

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt} ; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \rho\,\frac{d\psi}{dt} ;$$

On remplace $x = r \cos \psi$ et $y = r \sin \psi$. Une fois réalisé ce changement de variables, on essaie de satisfaire à ce système par des séries qui, pour la première approximation, se réduisent aux expressions :

$$\rho(t) = \rho_0(t) + \mu\rho_1(t) ; \quad \psi(t) = \psi_0(t) + \mu\psi_1(t).$$

Vu la petitesse des paramètres, l'approximation de l'ordre zéro est

$$\rho_0(t) = \rho_0 ; \quad \psi_0(t) = \varphi_0 - t,$$

ρ_0 et φ_0 étant des constantes arbitraires.

Finalement pour les corrections du premier ordre on a les e. d. :

$$d\rho_1/dt = g(\rho_0, \psi_0) ; \quad d\psi_1/dt = k(\rho_0, \psi_0)$$

qu'on intègre entre 0 et 2π. On exprime que le résultat est nul pour satisfaire à la condition de la périodicité dans la première approximation.

On remplace ainsi le système différentiel primitif par un système de deux équations aux différences ; ces dernières, au cas où la période 2π est petite par rapport à la durée totale du phénomène (ce qu'on supposera), peuvent être remplacées par le système de deux e. d. *stroboscopiques* qui sont de la forme

$$\frac{d\rho}{d\tau} = G(\rho, \varphi) ; \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = K(\rho, \varphi). \qquad (3.5)$$

Si l'on applique ce procédé à l'équation différentielle (3.7), on constate que la deuxième e. d. se réduit à l'identité $d\varphi/d\tau = 0$ et pour cette raison ne présente pas d'intérêt pour la suite. Quant à la première elle est ici :

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma\rho[\rho^2 + p\,\rho + q] = \Phi(\rho) \qquad (3.6)$$

où

$$\sigma = \frac{5}{8}E ; \quad p = \frac{2}{5}\frac{C}{E} \quad \text{et} \quad q = \frac{8}{5}\frac{A}{E}$$

les constantes A, C et E étant données par les relations

$$A = a/\mu ; \quad C = c/\mu \quad \text{et} \quad E = e/\mu.$$

On rappelle que l'avantage principal de ce procédé est qu'il remplace l'étude assez compliquée de solutions périodiques de (3.1) par une étude beaucoup plus simple relative à l'équilibre de (3.6).

De cette façon, si l'on arrive à déterminer les positions d'équilibre (les points singuliers) de (3.6), cela permet d'affirmer que le système primitif (3.4) possède une solution périodique ; la question de la stabilité sera aussi résolue par le même procédé, car à un point singulier *stable* du système stroboscopique correspond toujours une solution périodique *stable* de l'e. d. primitive (3.4).

Remarquons, en passant, que la variable $\rho = x^2 + \dot{x}^2$ dans un problème physique a la signification de l'*énergie* totale (avec une certaine normalisation et à une constante près) emmagasinée dans l'oscillateur.

Cela permet de faire la première constatation relative aux signes entre l'e. d. primitive (3.4) et son e. d. stroboscopique (3.6). En effet, supposons que (3.4) représente un oscillateur et que a, c et e soient positifs. Il est clair que dans ce cas c'est un oscillateur à l'amortissement positif (mais non-linéaire) pour toutes valeurs de x ; dans ces conditions le seul état stationnaire possible est $x = 0$; l'état de repos.

D'autre part, si l'on envisage l'e. d. (3.6), comme a, c et e sont positifs, p et q le sont aussi en sorte que $d\rho/d\tau < 0$ pour toute valeur de ρ. Donc l'énergie décroît toujours et, de nouveau, le seul état stationnaire possible est $\rho = 0$. De cette façon on est certain qu'il existe une correspondance physique entre l'e. d. primitive et son e. d. stroboscopique.

On peut alors explorer toutes les possibilités qui peuvent se présenter.

4. **Éléments topologiques du problème.** — Nous considérerons l'espace paramétrique à trois dimensions A, C, E ou $A = a/\mu$; $C = c/\mu$ et $E = e/\mu$, et étudierons la configuration topologique de l'e. d. (3.4) dans les huit octants de cet espace

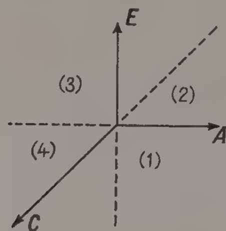


FIG. 1.

comme l'indique la figure 1, à savoir : les octants (1), (2), (3) et (4) pour $E > 0$, $(\sigma > 0)$ et les octants (5), (7), (7) et (8) pour $E < 0$, $(\sigma < 0)$.

Ces octants sont définis par des relations :

Pour $E > 0$

(1) $A > 0,\ C > 0$; $(p > 0,\ q > 0)$;
(2) $A > 0,\ C < 0$; $(p < 0,\ q > 0)$;
(3) $A < 0,\ C < 0$; $(p < 0,\ q < 0)$
et (4) $A < 0,\ C > 0$; $(p > 0,\ q < 0)$.

Pour $E < 0$

(5) $A > 0,\ C > 0$; $(p < 0,\ q < 0)$;
(6) $A > 0,\ C < 0$; $(p > 0,\ q < 0)$;
(7) $A < 0,\ C < 0$; $(p > 0,\ q > 0)$
et (8) $A < 0,\ C > 0$; $(p < 0,\ q > 0)$.

Dans chaque octant nous déterminerons trois éléments : (*a*) stabilité de l'état de repos ; (*b*) nombre de régimes stationnaires (cyclicité) et (*c*) leur stabilité.

Pour (*a*) il suffit de prendre $\rho \simeq 0$ dans (3.6) ce qui donne

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_{\rho \simeq 0} = (-\sigma q)\ \rho. \tag{4.1}$$

Pour $E > 0$, $(\sigma > 0)$ l'état de repos est stable si $q > 0$ et instable dans le cas contraire. Pour $E < 0$ c'est le contraire qui a lieu.

Pour la question (*b*) il suffit de déterminer le nombre de racines positives de l'équation

$$\rho^2 + p\rho + q = 0$$

puisque à chaque racine pareille de (3.6) correspond une solution périodique selon que le nombre de ces racines est 2, 1 ou 0 ; on a ainsi des configurations *bicycliques, monocycliques et acycliques.*

La dernière question (*c*) est aussi simple dans ce cas puisqu'il n'y a qu'une seule e. d. (3.6) avec la variable ρ et l'équation à la variation correspondante donne pour la stabilité de la racine $\rho = \rho_0$ la condition

$$\Phi_\rho(\rho_0) < 0 \tag{5.2}$$

où $\Phi_\rho(\rho_0)$ veut dire la dérivée de $\Phi(\rho)$ par rapport à ρ où on a remplacé $\rho = \rho_0$ après la différentiation. Avec la valeur (3.6) de $\Phi(\rho)$ on a

$$\Phi_\rho(\rho_0) = -\sigma(3\rho_0^2 + 2p\,\rho_0 + q) = -\sigma\rho_0(2\rho_0 + p)$$

puisque $\rho_0^2 + p\rho_0 + q = 0$.

Le critère (4.2), par conséquent est

$$\begin{matrix} \rho_0 + p/2 > 0 & \text{si} & E > 0\,; & (\sigma > 0) \\ \rho_0 + p/2 < 0 & \text{si} & E < 0\,; & (\sigma < 0). \end{matrix} \tag{4.3}$$

5. **Configurations topologiques.** — Nous pouvons étudier maintenant le caractère topologique de solutions de (3.6) dans les différents octants de l'espace (A, C, E).

OCTANT (1). — Comme le polynôme $\rho^2 + p\rho + q$ n'a pas de racines positives $d\rho/d\tau < 0$ en sorte que la seule configuration stationnaire possible est : S, — l'état de repos stable.

OCTANT (2). — L'état de repos dans ce cas est stable ; il y a deux racines positives

$$\rho_{01} = \frac{|p|}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

et

$$\rho_{02} = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{si} \quad \frac{p^2}{4} > q.$$

En appliquant le critère (4.3) on trouve que ρ_{01} est instable et ρ_{02} est stable. Par conséquent, si $p^2/4 > q$, la configuration est SIS.

Dans le cas où $p^2/4 < q$, le polynôme n'a pas de racines positives et la seule configuration stationnaire possible est : S, — l'état de repos stable.

On voit ainsi que dans l'octant (2) il y a deux configurations possibles : SIS et S et elles sont séparées par une surface Σ de l'équation : $p^2/4 = q$ ou bien dans les variables A, C, E, par la surface Σ de l'équation $E = C^2/40\,A$.

Si le point paramétrique est au-dessus de la surface Σ, on a la configuration SIS ; s'il est au-dessous de cette surface, la configuration est : S.

Du point de vue algébrique la surface Σ est le lieu de racines doubles $\rho_0 = \dfrac{|p|}{2}$; du point de vue topologique cette surface est le lieu de bifurcations du deuxième genre ou, ce qui revient au même, le lieu de cycles semi-stables puisqu'on a ici une bifurcation selon le schéma SIS → S(IS) → S ou bien une bifurcation inverse.

De cette façon une e. d.

$$\ddot{x} + (a - cx^2 + ex^4)\,\dot{x} + x = 0\,; \qquad a > 0,\ c > 0,\ e > 0 \tag{5.1}$$

a une configuration bicyclique : SIS si $c^2 > 40\,ae$ et une configuration acyclique si $c^2 < 40\,ae$.

Pour $c^2 = 40\,ae$ l'e. d. (5.1) a comme solution un cycle semi-stable mais cette configuration, étant

critique, n'est qu'une limite entre les deux genres de solutions.

Octants (3) et (4). — Dans ces deux octants l'état de repos est instable et le polynôme n'a qu'une seule racine positive, à savoir

$$\rho_0 = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad \text{pour (3)}$$

et

$$\rho_0 = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + |q|} \quad \text{pour (4).}$$

Le critère (4.3) montre que dans les deux cas ρ_0 est stable ce qui indique la configuration : IS configuration monocyclique.

En résumé, pour les quatre octants du demi-espace supérieur ($E > 0$) on a des configurations

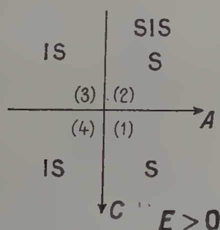


Fig. 2.

indiquées sur la figure 2. Les bifurcations du deuxième genre, comme nous venons de dire, ont lieu sur la surface Σ dans l'octant (2). Il existe aussi des bifurcations du premier genre dans le semi-plan $A = 0$, $E > 0$ comme on le voit directement de la figure 2. En effet, on a

IS → (I) S → (SI) S → SIS et IS → (IS) → (S) → S

ou, selon notre convention, nous indiquons par le symbole ( ) les éléments qui subissent une bifurcation.

Pour les octants du demi-espace inférieur ($E < 0$), le procédé est analogue mais, comme les critères de stabilité sont maintenant renversés, le polynôme $\rho^2 + p\rho + q$ restant le même, cela donne lieu aux *configurations inverses* (la *fig.* 3).

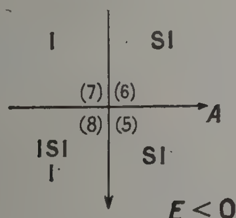


Fig. 3.

Remarquons que ce qui a été mentionné au sujet de l'octant (2) a lieu ici dans l'octant (8). En effet, il existe de nouveau une surface Σ où ont lieu les bifurcations du deuxième genre, à savoir

ISI → I(SI) → I.

De même, dans le plan $A = 0$, ont lieu les bifurcations du premier genre, à savoir :

I → (I) → (SI) → SI ; ISI → (IS) I → (S) I → SI.

Il existe toutefois une différence essentielle entre les configurations de la figure 2 et les configurations inverses de la figure 3. En effet, dans le premier cas nous avons des situations bien connues. Ainsi, par exemple IS, comme nous avons déjà dit, équivaut à la phrase : « un point singulier instable est entouré d'un cycle stable » ; c'est la configuration bien connue qui existe, par exemple, dans le cas de l'équation de van der Pol ; de même, la configuration : SIS est aussi bien connue et correspond à ce qu'on appelle « l'excitation dure ». Finalement la configuration simple ; S veut dire : l'état de repos stable (sans cycles).

Dans les configurations inverses de la figure 3 la situation est toute autre. Prenons, par exemple, la configuration SI qui équivaut à la phrase « un point singulier stable est entouré d'un cycle instable ». Il est clair que si l'affixe pour $t = 0$ est placé *à l'intérieur* du cycle instable, le seul état stationnaire est $\rho = 0$, c'est-à-dire que, dans notre convention, celà sera : S. Si toutefois il est placé en dehors de ce cycle on aura $\rho \to \infty$, la configuration sera : I.

Il en résulte que, tandis que la configuration IS est monocyclique, SI ne l'est pas et doit être considérée soit comme « acyclique S », soit comme « acyclique I » selon les conditions initiales.

De même, la configuration ISI est aussi spéciale ; il est visible que, si l'affixe (pour $t = 0$) est placé à l'intérieur du cycle stable, son comportement sera monocyclique ; ce comportement reste monocyclique si l'affixe est placé entre les cycles stable et extérieur instable. Toutefois, si la position initiale de l'affixe est *en dehors* du cycle extérieur instable, le comportement de cette configuration est tout autre : I.

6. **Bifurcations du troisième genre.** — Jusqu'à présent nous avons envisagé ce qui se passe, soit pour $E > 0$, soit pour $E < 0$. Étudions maintenant le changement de la configuration quand E *passe par zéro* en changeant du signe. Il suffit pour cela d'effectuer le passage de l'octant (1) à l'octant (5) de (2) à (6) et ainsi de suite. En comparant les figures 2 et 3 de cette façon on a

(1) → (5) : S → SI ; (2) → (6) : SIS ↘ / S ↗ SI ;

(3) → (7) : IS → I et (4) → (8) : IS ↗ ISI. / ↘ I

Il est visible que ces bifurcations, soit ajoutent,

soit enlèvent un *cycle extérieur*, sans changer la stabilité de l'état de repos. En outre, ce n'est pas certainement une bifurcation du deuxième genre puisqu'il ne s'agit que d'un seul cycle qui ou bien s'ajoute ou bien se retranche de la configuration qui existait avant.

7. **Résumé de l'analyse précédente.** — La discussion précédente a été faite par rapport à l'e. d. stroboscopique (3.6) qui se prête facilement à l'établissement de relations topologiques dans les différents octants de l'espace (A, C, E).

Il est utile d'ordonner ces résultats par rapport à l'e. d. primitive (3.4) puisque c'est cette dernière qui se présente généralement dans les applications. Pour simplifier l'écriture nous écrirons $-a$, $-c$, $-e$ au lieu de $-|a|$, $-|c|$, $-|e|$ en sorte que dans les équations ci-dessous a, c et e sont positifs, les signes appropriés tenant compte de différentes possibilités.

En ligne avec chaque e. d. nous indiquons la structure topologique correspondante, selon notre convention, et aussi la valeur de l'amplitude stationnaire ρ_0 ; il est à remarquer que, puisque $\rho = r^2$, la vraie amplitude est $r_0 = \sqrt{\rho_0}$

(1) $\ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4)\,\dot{x} + x = 0$; S : $\rho_0 = 0$

(2) $\ddot{x} + (a - cx^2 + ex^4)\,\dot{x} + x = 0$;

$$\begin{cases} \text{SIS si } c^2 > 40\,ae\,; & \rho_{01,2} = \dfrac{|p|}{2} \mp \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \\ \text{S si } c^2 < 40\,ae\,; & \rho_0 = 0 \end{cases}$$

(3) $\ddot{x} - (a + cx^2 - ex^4)\,\dot{x} + x = 0$;

$$\text{IS} \,;\quad \rho_0 = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + |q|}$$

(4) $\ddot{x} - (a - cx^2 - ex^4)\,\dot{x} + x = 0$;

$$\text{IS} \,;\quad \rho_0 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + |q|}$$

(5) $\ddot{x} + (a + cx^2 - ex^4)\,\dot{x} + x = 0$;

SI ; ρ_0 le même qu'en (3)

(6) $\ddot{x} + (a - cx^2 - ex^4)\,\dot{x} + x = 0$;

SI ; ρ_0 le même qu'en (4)

(7) $\ddot{x} - (a + cx^2 + ex^4)\,\dot{x} + x = 0$; I ; $\rho_0 \to \infty$

(8) $\ddot{x} - (a - cx^2 + ex^2)\,\dot{x} + x = 0$;

$$\begin{cases} \text{ISI si } c^2 > 40\,a\;e & \rho_{01,2} \text{ le même qu'en (2)} \\ \text{I si } c^2 < 40\,ae & \rho_0 \to \infty. \end{cases}$$

8. **Cas particuliers.** — Pour les plans de coordonnées : $A = 0$, $C = 0$ et $E = 0$, ainsi que pour les axes $A = C = 0$, $A = E = 0$ et $C = E = 0$ les relations sont plus simples.

Cas $A = 0$; $(q = 0)$. — Équation (3.6) devient

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma\rho^2(\rho + p) = \Phi(\rho) \qquad (8.1)$$

et le critère (4.1) : $(d\rho/d\tau)_{\rho \simeq 0} = -\sigma p\, \rho^2$.

L'amplitude stationnaire est possible si $p < 0$ et est $\rho_0 = |p|$. La condition de sa stabilité est ici

$$\Phi_\rho(\rho_0) = -\sigma\,|p|.$$

Si $E > 0$, $(\sigma > 0)$, le cycle $\rho_0 = |p|$ est stable et l'état de repos : $\sigma|p|\,\rho^2 > 0$ est instable ; on a ainsi la configuration IS.

Ainsi, une équation différentielle :

$$\ddot{x} - (cx^2 - ex^4)\,\dot{x} + x = 0, \quad c > 0, \quad e > 0 \qquad (8.2)$$

admet une solution périodique stable avec

$$\rho_0 = |p| = \frac{2}{5}\,\frac{|c|}{e}$$

comme amplitude stationnaire. Dans le même cas mais pour $E < 0$ on a :

$$\frac{d\rho}{d\tau} = +\,|\sigma|\,\rho^2(\rho + p).$$

L'existence de l'amplitude stationnaire exige de nouveau $p < 0$ en sorte que cette amplitude reste la même comme dans le cas précédent mais ici, p peut être négatif seulement si $c > 0$ ce qui donne l'état de repos stable. Le critère (4.2) indique que l'amplitude stationnaire est instable. En résumé : la configuration dans ce cas est : SI.

De cette façon une e. d. de la forme

$$\ddot{x} + (cx^2 - ex^4)\,\dot{x} + x = 0 \quad \text{ou} \quad c > 0 \quad \text{et} \quad e > 0 \quad (8.3)$$

possède une configuration inverse SI qui doit être considérée comme « acyclique S » si les conditions initiales se trouvent *à l'intérieur* du cycle instable et « acyclique : I » dans le cas contraire

Cas $C = 0$ $(p = 0)$; dans ce cas (3.6) est

$$d\rho/d\tau = -\sigma\rho(\rho^2 + q)$$

et on voit que, pour l'existence de ρ_0 stationnaire, q doit être négatif, c'est-à-dire, a et e doivent être de signes contraires ; on a donc une alternative : soit $e > 0$, $a < 0$, soit $e < 0$, $a > 0$.

Dans le premier cas, en reproduisant le même argument, on trouve que la configuration est : IS avec

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{8}{5}\,\frac{|a|}{e}}.$$

Cela a lieu dans le cas d'une équation différentielle :

$$\ddot{x} - (a - ex^4)\,\dot{x} + x = 0\,; \quad a > 0, \quad e > 0. \quad (8.4)$$

L'autre cas : $e < 0$, $a > 0$ mène à une configuration inverse : SI avec la même valeur de ρ_0, comme, d'ailleurs, on pouvait s'y attendre.

Cas $E = 0$. — Dans ce cas on ne peut pas utiliser l'e. d. sous la forme (3.6) mais le calcul simple montre que dans ce cas l'équation stroboscopique est

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho\left[\frac{1}{4} C\rho + A\right] = \Phi(\rho) \qquad (8.5)$$

et on voit que l'amplitude stationnaire est ici $\rho_0 = -4A/C$ ce qui exige que A et C doivent être de signes contraires.

On a de nouveau une alternative : soit $A > 0$, $C < 0$, soit $A < 0$, $C > 0$. On trouve que dans le premier cas on a une configuration inverse SI mais le second cas donne une configuration monocyclique : IS et résulte dans l'équation différentielle :

$$\ddot{x} - (|a| - cx^2)\,\dot{x} + x = 0. \qquad (8.6)$$

Si $a = c$ cette e. d. n'est autre chose que l'équation différentielle de van der Pol avec $\rho_0 = 4$; $r_0 = 2$.

Ainsi, dans cette généralisation, l'équation de Van der Pol apparaît dans le quatrième octant de l'espace paramétrique dans le plan $E = 0$.

Les trois cas particuliers qui correspondent aux trois axes de l'espace paramétrique, mènent aux e. d. stroboscopiques

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma\rho^3 \,; \quad \frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{4} C\rho^2 \text{ et } \frac{d\rho}{d\tau} = -A\rho \quad (8.7)$$

qui n'ont pas de solutions périodiques et qui sont, dès lors, *acycliques* soit S, soit I selon le signe de constantes ; remarquons que la dernière e. d. se rapporte au cas linéaire.

Il est utile de remarquer que les résultats, que nous venons d'obtenir, peuvent en partie être prévus par un raisonnement intuitif. En effet, prenons, par exemple l'e. d. (8.2) ; il est clair que, quand x est petit, le terme non-linéaire $-cx^2\dot{x}$ domine le terme $ex^4\dot{x}$; donc au début du mouvement l'amortissement est négatif et l'amplitude commence à croître mais, au fur et à mesure que x croît, le terme $+ex^4\dot{x}$ commence à croître plus vite que la valeur absolue du terme $-cx^2\dot{x}$, ce qui change éventuellement le signe de l'amortissement (de négatif à positif) avec la limitation de l'amplitude par la « résistance positive » si l'on veut utiliser un langage familier.

De cette façon on peut constater d'une façon plous ou moins intuitive que la configuration est bien : IS mais ce raisonnement ne permet pas de déterminer la valeur de l'amplitude stationnaire comme cela résulte de la méthode que nous avons suivie.

9. **Équation de Rayleigh et équations mixtes.** — Dans son Traité *Theory of Sound*, Lord Rayleigh a formulé une e. d. de la forme

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = 0. \qquad (9.1)$$

Après la découverte de van der Pol de son équation, quelques années plus tard, l'intérêt de l'e. d. de Rayleigh est apparu et on a constaté aisément que cette équation se réduit à celle de van der Pol par une différentiation et en changeant la variable ($y = \dot{x}$) ; cela suppose, bien entendu, que la fonction $f(x)$ est dérivable, ce qui est toujours le cas dans les applications. En appliquant la méthode stroboscopique à l'e. d. de Rayleigh écrite sous la forme

$$\ddot{x} + (a + c\dot{x}^2 + e\dot{x}^4)\,\dot{x} + x = 0 \qquad (9.2)$$

on aboutit exactement à la même équation stroboscopique (3.6) seulement avec autres valeurs de constantes p et q. Donc tout ce qui a été dit au sujet de l'e. d. de Liénard s'applique aussi bien à l'e. d. de Rayleigh.

Récemment N. Levinson et O. K. Smith [5] ont généralisé l'équation de Liénard en prenant la fonction f de la forme $f(x, \dot{x})$. L'étude de ces auteurs a été limitée à la partie purement théorique du problème, à savoir : la démonstration de l'existence d'une solution périodique.

Il est facile de montrer que la méthode que nous avons suivie s'applique aussi bien à ces équations « mixtes », en quelque sorte, combinant l'équation de Liénard avec celle de Rayleigh.

Prenons comme un exemple une e. d. mixte de la forme

$$\ddot{x} + (a + cx^2 + b\dot{x}^2)\,x + x = 0 \qquad (9.3)$$

à laquelle correspond une e. d. stroboscopique

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho\left[A + \frac{1}{4}(C + 3B)\,\rho\right] = \Phi(\rho) \qquad (9.4)$$

où $A = a/\mu$, $B = b/\mu$, $C = c/\mu$ comme avant. En posant $\frac{1}{4}(C + 3B) = m$, l'amplitude stationnaire est $\rho_0 = -A/m$ et $\Phi_\rho(\rho_0) = A$ dans les notations précédentes.

Par conséquent les conditions : $A < 0$ et $m > 0$ satisfont à l'existence de l'amplitude stationnaire ainsi qu'à sa stabilité ; en outre, l'état de repos est instable.

On a ainsi une configuration : IS pourvu que le point paramétrique (A, B, C) se trouve dans le demi-espace ($A < 0$) au-dessus du plan $C = -3B$ passant par l'axe A.

10. **Correction de la fréquence.** — Dans ce qui précède nous avons étudié l'équation différentielle (3.1) sous la forme de Liénard. A une date ultérieure MM. Levinson et Smith [5] ont généralisé cette e. d., comme nous l'avons déjà mentionné ; leur e. d. a la forme :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = 0. \qquad (10.1)$$

Dans la section précédente nous avons déjà parlé de cette e. d. au cas où $g(x) = x$.

Il est nécessaire maintenant de lever cette restriction en supposant que $g(x) \neq x$. Comme dans les applications $g(x)$ est toujours une fonction

impaire, nous pouvons la considérer sous la forme

$$g(x) = x + mx^3 + nx^5 \qquad (10.2)$$

où m et n des petits nombres si l'on veut rester dans le cadre de la théorie classique.

Remarquons que dans les problèmes appliqués, surtout en électricité, on rencontre souvent le cas où $g(x) = x$. Cela tient à ce que, dans les problèmes d'électricité, le terme en question correspond à l'action du condensateur mais ce dernier est généralement un élément linéaire car le voltage aux bornes du condensateur varie proportionnellement à la charge. Il n'en est pas de même dans le cas de quelques condensateurs ayant des diélectriques spéciaux ; dans les problèmes mécaniques $g(x) \neq x$ se produit chaque fois que le couple (ou force) de rappel n'est pas linéaire.

Ce qui est essentiel dans le cas où $g(x) \neq x$ est le fait que cela entraîne généralement le changement de la fréquence qui, au lieu d'être *un*, est affectée d'une *correction non linéaire* déjà en première approximation. Il en résulte que, dans la formation du système stroboscopique, apparaît la deuxième équation (pour la phase) qui, dans ce qui précède, se réduisait à : $d\varphi/d\tau = 0$.

Pour se rendre compte de cette circonstance, appliquons le changement de variables à l'e. d. (10.1) représentée par son système équivalent ; il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt} = xy - f(x)\,y^2 - g(x)y \qquad (10.3)$$

$$\rho\frac{d\psi}{dt} = -f(x)\,xy - g(x)\,x - y^2.$$

On doit remplacer dans ces équations $x = r\cos\psi$; $y = r\sin\psi$ afin de pouvoir introduire la variable $\rho = x^2 + \dot{x}^2 = x^2 + y^2$.

Pour pouvoir faire le passage aux équations stroboscopiques, il faut d'abord intégrer le système d'e. d. pour ρ_1 et ψ_1 entre zéro et 2π. Dans cette intégration disparaissent le premier et le troisième termes à droite de la première e. d. (10.3) qui reste, dès lors, la même qu'avant. Donc l'étude topologique que nous avons faite précédemment reste sans changement.

En ce qui concerne la deuxième e. d., le premier terme à droite disparaît aussi pour des raisons évidentes mais il reste le deuxième et le troisième termes qui conduisent à la deuxième équation stroboscopique de la forme

$$d\varphi/d\tau = \frac{1}{16}\,\rho_0(6M + 5N\,\rho_0) \qquad (10.4)$$

où $M = m/\mu$ et $N = n/\mu$, les facteurs numériques provenant des intégrations.

Cela montre que la fréquence (dans la première approximation) n'est plus *un* mais est : $1 + d\varphi/d\tau$.

On voit ainsi que la fonction $f(x)$ intervient *indirectement* dans la détermination de $d\varphi/d\tau$ (par l'intermédiaire de ρ_0) mais l'inverse n'est pas vrai, à savoir : la forme de $g(x)$ n'intervient nullement dans la détermination de la configuration topologique des solutions, qui ne dépend que de $f(x)$.

11. Formes spéciales de l'équation de van der Pol. — En suivant la même méthode, on peut montrer aussi que l'équation différentielle de van der Pol qu'on écrit généralement sous la forme

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\,\dot{x} + x = 0 \qquad (11.1)$$

peut être aussi généralisée tout en conservant sa configuration topologique : IS. En effet, on peut considérer comme équation de van der Pol toute e. d. de la forme :

$$\ddot{x} - \mu(1 - \varphi(x))\,\dot{x} + x = 0 \qquad (11.2)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive croissante avec x à partir de la valeur $\varphi(0) = 0$, ayant la même configuration : IS mais avec des amplitudes stationnaires différentes selon la forme de $\varphi(x)$.

La fonction $\varphi(x)$ n'a pas besoin même d'être analytique et peut être formée par des arcs de courbes diverses, pourvu que les conditions qui viennent d'être mentionnées soient remplies.

On peut prendre, par exemple, $\varphi(x) = x^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ce qui introduit des fonctions paires ; on peut prendre aussi des fonctions impaires à condition de ne considérer que leurs valeurs absolues. Ainsi, par exemple, une e. d. de la forme

$$\ddot{x} - \mu(1 - |x|)\,\dot{x} + x = 0 \qquad (11.3)$$

peut être considérée comme celle de van der Pol.

Comme exemple, nous considérons $\varphi(x) = x^{2n}$. Pour $n = 1$ on a l'équation connue caractérisée par l'amplitude stationnaire $\rho_0 = 4$ ou bien $r_0 = 2$.

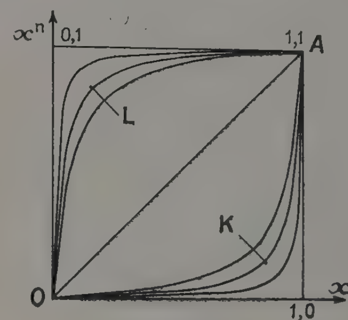


Fig. 4.

Il est utile de rappeler que la fonction $\varphi(x) = x^n$, $n > 0$ a la forme indiquée sur la figure 4 dans l'intervalle (0.1).

Pour $n = 1$, $\varphi(x)$ est la droite OA. Pour $n > 1$ et croissant, les courbes $\varphi(x)$ croissent lentement d'abord et, au contraire, rapidement vers la fin de l'intervalle ; nous indiquons ces courbes par la

lettre K sur la figure. Si n est dans l'intervalle $0 < n < 1$ et n décroît, les courbes, au contraire, croissent rapidement au début de l'intervalle et lentement à la fin (courbes L).

Pour (11.2) et avec $\varphi(x) = x^{2n}$, l'application de la méthode stroboscopique donne

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{\pi}\rho \times \left[\int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 . d\psi_0 - \rho^n \int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 \text{Cos}^{2n} \psi_0 . d\psi_0\right];$$

$$\psi_0 = \varphi_0 - t, \qquad \varphi_0 \text{ une constante arbitraire}$$

en sorte que l'amplitude stationnaire est

$$\rho^* = \sqrt[n]{\int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 . d\psi_0 \Big/ \int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 \text{Cos}^{2n} \psi_0 d\psi_0} \tag{11.4}$$

Pour $n = 1$ on a le résultat bien connu ; $\rho^* = 4$ ($r^* = 2$) ; pour $n = 2$, $\rho^* = 2.83$; pour $n = 3$, $\rho^* = 2.34$, etc. en sorte que les amplitudes diminuent quand $n > 1$ croît.

Comme exemple de $n < 1$, prenons $n = 1/2$, ce qui donne

$$\ddot{x} + \mu(|x| - 1)\dot{x} + x = 0. \tag{11.5}$$

Dans ce cas, il est plus commode de prendre comme variable $r = \sqrt{\rho}$ et on a

$$r^* = \int_5^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 d\psi_0 \Big/ \int_0^{2\pi} |\text{Cos } \psi_0| \text{ Sin}^2 \psi_0 d\psi_0 \cong 2{,}36 ;$$

$$\rho^* \cong 5.58$$

ce qui montre que, dans ce cas, les amplitudes stationnaires, au contraire, augmentent quand n diminue.

12. **Amortissement variable.** — Les résultats précédents ont été obtenus par l'emploi du procédé stroboscopique et il est utile de compléter cette étude par quelques considérations d'ordre physique puisque tous ces problèmes, en fin de compte, se présentent dans les applications.

Il est à remarquer que ces considérations physiques, tout en étant utiles pour *comprendre* la nature de phénomènes, ne peuvent pas donner la valeur de l'amplitude stationnaire ρ_0 et, pour cette raison, ne sont pas complètes.

Dans les applications (surtout en électricité) on a introduit la notion de *la résistance* (ou amortissement) *négative* qui veut dire : absorption d'énergie pour distinguer ce cas de la *résistance* (amortissement) *positive* où, au contraire, a lieu une dissipation d'énergie. Il est clair que l'équation de Liénard,

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$$

considérée comme un oscillateur électrique, par exemple, peut être envisagée comme *un oscillateur à l'amortissement variable.*

On peut se rendre compte de la signification physique de résultats obtenus dans les sections 5 et 6 en supposant, par exemple $A = C = E = 1$ pour simplifier les calculs.

Avec ces valeurs de coefficients on peut explorer qualitativement toutes les configurations sauf SIS dans l'octant [2] puisque cette dernière exige la condition $C^2 > 40\ AE$. Si, par conséquent on prend $A = E = 1$, il faudra prendre pour C une valeur : $C > \sqrt{40}$, par exemple 7 ; mais cela s'applique seulement a cette configuration particulière (SIS dans l'octant (2)). De cette façon il suffit de construire les fonctions $f(x)$ pour tous les octants successifs :

(1) $f(x) = 1 + x^2 + x^4$;

(2) $f(x) = 1 - x^2 + x^4$; $f(x) = 1 - 7x^2 + x^4$;

(3) $f(x) = -1 - x^2 + x^4$; (4) $= -1 + x^2 + x^4$.

La fonction $f(x)$ dans l'octant (1) est toujours

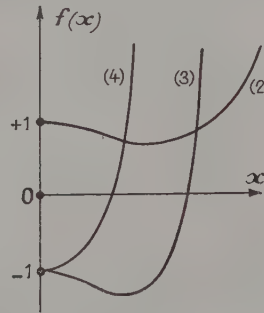


Fig. 5.

positive ainsi que la courbe (2), figure 5. Donc, dans ces deux cas, comme l'amortissement est partout positif, le régime stationnaire ne peut être qu'acyclique : S.

Les courbes (3) et (4) indiquent que l'amortissement passe du négatif au positif, ce qui indique que le régime dans ces deux cas est : IS.

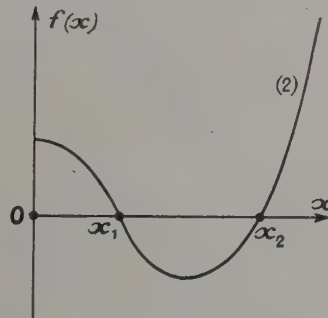


Fig. 6.

Quant à la courbe $2a$ de la figure 6, elle montre que l'amortissement est d'abord positif (jusqu'au point x_1), puis négatif entre x_1 et x_2 et, pour $x > x_2$,

est de nouveau positif. On voit ainsi la signification physique de la configuration : SIS sans l'octant (2) que nous avons étudié précédemment.

On a des courbes analogues pour $E < 0$ mais dans ce cas ces courbes sont symétriques des courbes précédentes par rapport à l'axe des x, ce qui explique le caractère inverse de configurations qui apparaissent dans ce cas.

13. **Remarques.** — Dans cette note nous avons étudié l'e. d. de Liénard sous la forme (3.4) qu'on rencontre le plus souvent dans les problèmes appliqués mais le procédé est général et peut être appliqué dans les autres cas.

Ainsi, par exemple, si le polynôme est du troisième degré, à savoir : $\rho^3 + p\rho + q$ ou p et q ont des valeurs différentes, bien entendu, de celles que nous avions précédemment, la marche à suivre est la même mais les résultats sont différents.

Dans ce cas, le polynôme peut avoir soit une seule racine réelle si le discriminant

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0,$$

soit trois racines pareilles si $\Delta < 0$. Il faut d'abord établir les conditions sous lesquelles ces racines sont positives puisque ρ doit être positif.

Le nombre de configurations est plus grand en conséquence. Ainsi, si les trois racines (cas où $\Delta < 0$) sont positives, il peut y avoir des configurations SISI, ou bien ISIS avec des formes diverses de bifurcations.

Ainsi, par exemple, il peut y avoir des bifurcations du premier genre : SISI → (SI) SI → ISI ou bien ISIS → (IS) IS → SIS ; ou bien celles du deuxième genre : SISI → S(IS) I → SI etc... ; finalement il y aura aussi les bifurcations du troisième genre, par exemple SISI → SIS(I) → SIS etc.

Les bifurcations du deuxième genre apparaissent quand Δ passe par zéro car dans ce cas deux racines réelles ou disparaissent, ou apparaissent. Il est clair qu'en utilisant la méthode stroboscopique, l'évolution d'une configuration topologique d'une e. d. de ce genre est liée à l'étude de l'évolution correspondante de racines réelles positives d'un polynôme en ρ qui figure comme coefficient de $\dot{x}$ dans l'équation de Liénard.

Manuscrit reçu le 28 mars 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Poincaré (H.), *Acta Mathematica*, vol. **7** ; « Figures d'équilibre d'une masse fluide », Gauthier-Villars, Paris, 1903.

[2] Andronov (A.) et Chaikin (S.), « Theory of oscillations », traduction anglaise par S. Lefschetz, Princeton University Press, 1949.

[3] Poincaré (H.), « Sur les courbes définies par une équation différentielle » une série de mémoires dans le *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, entre 1881 et 1886 ; aussi : « Œuvres », t. **1**.

[4] Poincaré (H.), « Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste », Gauthier-Villars, Paris, t. 1.

[5] Levinson (N.) et Smith (O. K.), *Duke Math. Journal*, 1942, **9**.

Nous citons seulement quelques ouvrages se rapportant directement à cette note. Pour la littérature complète relative à ce sujet, voir le Traité, 1955 « Equazioni differenziali non lineari », par G. Sansone et R. Conti, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 12
TOME 18, DÉCEMBRE 1957, PAGE 131 A.

DISPOSITIF SIMPLE POUR LA MESURE DE L'ÉMISSION DES POUDRES LUMINESCENTES EXCITABLES EN ULTRA-VIOLET

Par Maurice LEGRAND, André LACAM et Marc GROSJEAN,
Services de Recherches Uclaf.

Différents appareils permettant de mesurer la répartition spectrale énergétique des phosphores ont été décrits, notamment par Zworykin [1] et Hardy [2]. Ces appareils, qui ont été surtout conçus pour l'étude des cathodoluminescents, peuvent recevoir des dispositifs pour l'examen des produits excitables par l'ultraviolet. Pour éviter, dans ce dernier cas, l'emploi de spectroradiomètres généralement assez complexes, nous avons mis au point un dispositif simple, facile à adapter sur un spectrophotomètre Beckman D. U., et qui permet de tracer des courbes d'émission.

La méthode utilisée peut être avantageusement comparée aux procédés utilisant des combinaisons filtres-cellules [3] car, d'une part, il est facile de conserver une bonne précision par des étalonnages fréquents et, d'autre part, l'examen de la courbe spectrale d'émission fournit des renseignements plus nombreux que la simple connaissance des coordonnées colorimétriques, x, y, z [4].

Nous décrivons, en outre, dans cette note le procédé d'étalonnage utilisé pour obtenir la courbe de correction des cellules photoélectriques de l'appareil, ainsi que la méthode de calcul conduisant aux coordonnées colorimétriques.

Appareillage. — Le dispositif utilisé s'apparente à celui décrit par la firme Beckman pour les études de réflexion diffuse, mais il en diffère par le fait que c'est la lumière réfléchie ou réémise par l'échantillon qui est dispersée dans le monochromateur et non la lumière d'excitation. On parvient ainsi à déterminer une répartition spectrale des lumières émises par les phosphores.

La figure 1 représente schématiquement le système optique de notre dispositif. La poudre, placée sur le porte-échantillon, est excitée par la source S et le faisceau lumineux réémis est envoyé sur la fente d'entrée du monochromateur par l'intermédiaire de Σ, M et L_2. Les lentilles L_1 et L_2 sont en quartz et les miroirs aluminisés en surface, ce qui permet l'emploi de l'appareil aussi bien en ultraviolet que dans le visible. Plusieurs sources interchangeables peuvent être utilisées : lampes à filament de tungstène, à hydrogène ou à mercure. Certaines sources, en particulier la lampe à vapeur de mercure, émettant des raies très lumineuses sans intérêt pour l'excitation des phosphores, on intercale des filtres convenables sur le trajet des rayons émis par la source S. Nous avons ainsi employé un filtre Chance O.X.7 avec les luminescents excitables par la raie de résonance du mercure et un filtre de Wood avec les phosphores sensibles à la raie 3 635 Å.

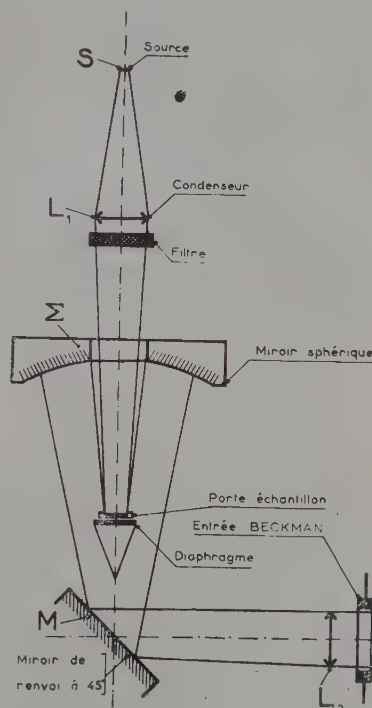


Fig. 1. — Schéma du dispositif optique.

Le porte-échantillon peut recevoir deux coupelles, l'une contenant la poudre à étudier et l'autre un étalon de réflexion. Cet étalon est constitué d'une matière support, sous forme d'un petit comprimé de carbonate de magnésium, recouverte d'une couche de magnésie. La surface du comprimé étant petite, il est très facile de la recouvrir de magnésie. Cette opération est renouvelée avant chaque série de mesures. L'ensemble du dispositif est contenu dans une boîte verticale qui se fixe

sur un Beckman D. U., à cellule photomultiplicatrice, à la place du système prévu pour l'analyse par spectre de flamme (*fig.* 2).



Fig. 2. — Vue du dispositif optique monté sur un spectrophotomètre Beckman.

Réglages. — Les réglages optiques sont prévus pour que la réponse de la cellule soit maximum pour une fente aussi faible que possible, l'écran de magnésie étant éclairé par une lampe à hydrogène servant de source. Le seul réglage qui ne soit pas définitif concerne la focalisation de la lumière excitatrice sur le porte-échantillon. Ce réglage est parfois rendu nécessaire par la différence de géométrie qui existe entre les diverses sources.

Mesures. — *a*) Émission des luminescents. — Les mesures consistent à déterminer pour chaque longueur d'onde la différence entre la réponse de la cellule obtenue avec la poudre et celle donnée par l'écran de magnésie. En principe, cette dernière est très faible sauf au voisinage des raies de l'arc au mercure, source excitatrice le plus souvent utilisée. On doit, du reste, éviter autant qu'il est possible les mesures qui comportent une réflexion importante sur la magnésie car l'hypothèse de l'égalité entre les coefficients de réflexion de la poudre et de la magnésie n'est pas exactement vérifiée.

Durant toute la mesure, on doit opérer à largeur de fentes constante. Lorsque l'on étudie une poudre d'émission inconnue, il est bon d'effectuer une détermination rapide pour choisir la largeur de fente la plus convenable au maximum apparent d'émission.

b) Réflexion des poudres. — On utilise comme source une lampe donnant un fond continu et pour chaque longueur d'onde on ajuste la sensibilité du Beckman de manière à lire 100 % de transmission avec l'écran de magnésie. Avec l'échantillon essayé, la valeur de la transmission lue sur le tambour fournit, en %, le facteur de réflectivité de la substance.

Étalonnage. — La réponse spectrale des cellules utilisées dans le Beckman n'étant pas uniforme en fonction de la longueur d'onde, les mesures ne permettent pas de tracer directement la courbe de l'énergie relative d'émission du phosphore en fonction de la longueur d'onde. Chaque résultat doit être multiplié par un facteur qui corrige les différences de l'ensemble optique des sensibilités chromatiques, cellules comprises.

Pour déterminer ces facteurs, nous avons pris comme source une lampe à filament de tungstène étalonnée en température de couleur par le Conservatoire National des Arts et Métiers (C. N. A. M.). Comme les sources à filament de tungstène offrent une émission très voisine du corps noir, il est possible par la courbe de Planck, correspondant à la température de couleur de l'étalonnage, de connaître la répartition énergétique spectrale de la source. On détermine alors, longueur d'onde par longueur d'onde, la réponse des deux cellules du Beckman pour leur région d'utilisation [1].

Sous la seule réserve que les cellules ont une réponse linéaire par rapport à l'énergie reçue à une longueur d'onde déterminée, on peut écrire que le rapport des émissions lues à deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 est :

$$\frac{E_{\lambda_1}}{E_{\lambda_2}} = \frac{P_{\lambda_1}}{P_{\lambda_2}} \times \frac{T_{\lambda_1}}{T_{\lambda_2}}$$

P_{λ_1} et P_{λ_2} étant des facteurs de correction, T_{λ_1} et T_{λ_2} les transmissions lues à l'équilibre, sur le tambour du Beckman, qui correspondent aux énergies E_{λ_1}, E_{λ_2} de la source. On en déduit :

$$\frac{P_{\lambda_1}}{P_{\lambda_2}} = \frac{E_{\lambda_1}}{E_{\lambda_2}} \times \frac{T_{\lambda_2}}{T_{\lambda_1}}.$$

Comme nous opérons par comparaison, on peut déterminer les P_λ par rapport à l'un d'entre eux auquel on confère la valeur 100 %. Nous avons attribué cette valeur à $P_{540 m\mu}$, 540 mμ étant la

[1] On trouvera dans le mémoire de Nottingham [4] une méthode légèrement différente faisant intervenir la température de brillance et le calcul des coefficients d'émissivité du tungstène pour chaque λ.

longueur d'onde qui correspond au maximum de sensibilité de l'appareil équipé d'une cellule 1.P.28. Connaissant les différents P_λ, on obtient les énergies relatives émises par une poudre en multipliant pour chaque longueur d'onde la valeur de T_λ trouvée par le P_λ correspondant. Par simple division, on obtient ensuite les valeurs en % de l'énergie soit par rapport à une poudre étalon, soit par rapport à l'une des valeurs obtenues pour la poudre étudiée, par exemple le maximum d'émission.

Il faut enfin noter qu'il est nécessaire de maintenir, avec une assez grande précision, l'intensité du courant traversant la lampe étalon, dont la valeur est indiquée par le Conservatoire National des Arts et Métiers. Nous mesurons ce courant en déterminant la chute de tension aux bornes d'une résistance étalon de $0{,}2 \pm 2.10^{-5}$ ohm insérée dans le circuit de chauffage. Le réglage s'obtient au moyen d'un rhéostat à plaques de graphite permettant d'ajuster très progressivement le courant de chauffage à la valeur choisie.

Résultats. — La figure 3 rassemble les résultats des mesures obtenues à partir de trois halophosphates Sylvania. La figure 4 correspond à un

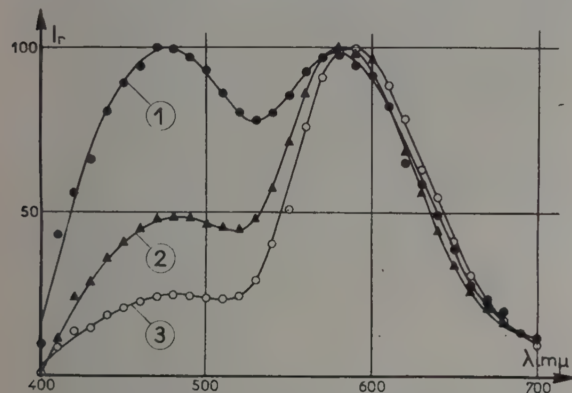


Fig. 3. — Courbes d'émission d'halophosphates.
1. — Produit Sylvania 5651 (6 500 °K).
2. — Produit Sylvania 5454 (4 500 °K).
3. — Produit Sylvania 4351 (3 500 °K).

tungstate de magnésium et à une willemite (silicate de zinc) que nous avons préparés. L'émission d'un silicate de baryum (Sylvania 3301) qui se situe dans l'ultra-violet est fournie par la figure 5 (²). Enfin, la figure 6 correspond à la réflexion diffuse d'un silicate de luxe Sylvania. Dans ce cas, le maximum d'absorption se situe aux environs de 2 500 Å, longueur d'onde qui correspond à la plus grande efficacité d'excitation par la lumière incidente.

(²) Les coefficients P_λ nous ont été communiqués par le N. B. S. des États-Unis. Ces valeurs correspondant à des moyennes sur plusieurs cellules, les résultats obtenus peuvent être entachés d'une erreur.

Le tableau ci-dessous résume les différentes caractéristiques spectrales des corps que nous avons étudiés. Pour les produits émettant dans le visible,

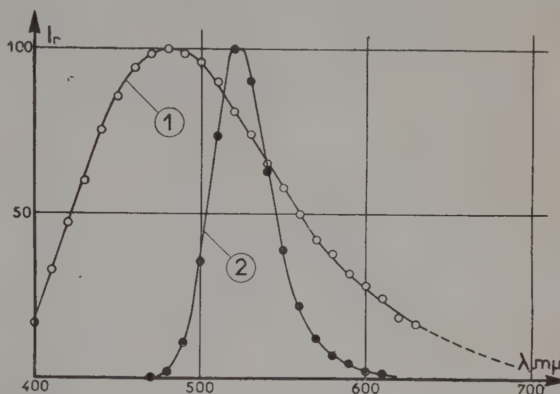


Fig. 4. — Courbes d'émission d'un tungstate de magnésium (courbe 1) et d'un silicate de zinc (courbe 2).

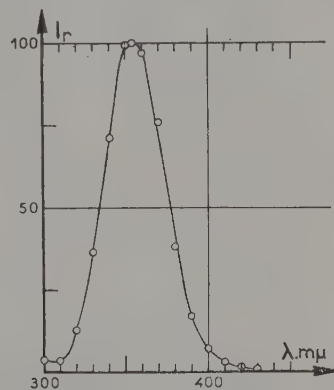


Fig. 5. — Courbe d'émission d'un silicate de baryum (Pb).

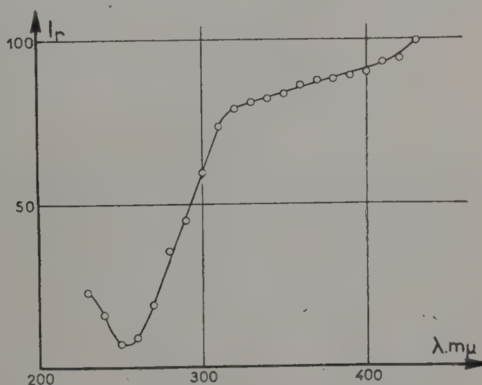


Fig. 6. — Réflexion diffuse d'un silicate.

les coordonnées x, $\bar{y}$ et z ont été déterminées à partir des courbes par la méthode des ordonnées sélectionnées à trente composantes [5].

La divergence qui se manifeste entre les valeurs de température de couleur annoncées et celles que nous avons déterminées pourrait être due au fait que l'émission de ces produits est mesurée, par le fabricant, sur des tubes d'éclairage. Dans ce cas, l'émission propre de l'arc au mercure de dominante bleu-vert n'est pas négligeable et augmente la température de couleur de la lumière globale émise.

TABLEAU DE CARACTÉRISTIQUES SPECTRALES

	x	y	T °K
Halophosphates :			
— Sylvania 4351	0,450	0,413	2 800
— Sylvania 5454	0,390	0,394	3 850
— Sylvania 5651	0,320	0,342	6 100
Silicate de zinc	0,197	0,710	—
Tungstate de magnésium....	0,229	0,306	—

Manuscrit reçu le 15 juillet 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ZWORYKIN (V. K.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1939, **29**, 84.
[2] HARDY (A. E.), *Trans. Amer. Electrochem. Soc.*, 1947, **91**, 221.
[3] HUNTER (R. S.), *J. Electrochem. Soc.*, 1955, **102**, 512-517.
[4] NOTTINGHAM (W. B.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1949, **39**, 641-647.
[5] BLOTTIAU (F.), Colorimétrie (Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*, Paris), 1951.

REVUE DES LIVRES

NATIONAL BUREAU OF STANDARDS, **Examen des images optiques.** (Optical Image Evaluation.) 1 vol., 15 × 23 cm, 289 pages, National Bureau of Standards, Washington 1954, $ 2,25.

A l'occasion du cinquantenaire du National Bureau of Standards, s'est tenu à Washington un colloque sur l'examen des images optiques (Optical Image Evaluation)

« L'Optique géométrique est l'une des plus anciennes branches de l'optique mais la conception et la réalisation d'un système optique ne se sont pas développés très scientifiquement... En effet la conception d'un système optique était due à d'habiles artisans qui considéraient leurs méthodes comme des secrets de fabrication...

Encore maintenant la conception et la réalisation d'un système optique reste souvent plus un art qu'une science...»

Cependant l'emploi de nouvelles méthodes pour le « calcul à travers » (grandes machines à calculer...) l'apparition de systèmes suffisamment corrigés pour que les phénomènes de diffraction deviennent prépondérants, ... modifient largement cet état de fait et justifient l'intérêt d'un colloque sur ces problèmes.

Les communications présentées couvrent un large champ : F. ZERNIKE. Théorie des aberrations du point de vue de la diffraction. — A. MARÉCHAL. Le contraste des images optiques et l'influence des aberrations. — H. OSTERBERG et ROBERT A. MCDONALD. Images de diffraction produites par par des objectifs de grande ouverture bien corrigées. — L. E. HOWLETT. Bases pour « tester » les objectifs photographiques. — DUNCAN E. MACDONALD. Dispositifs de photographie aérienne du point de vue qualité. — M. HERZBERGER. Modèle mathématique d'un système optique. — A. ARNULF. Méthodes et appareillages pour évaluer les performances et la qualité d'un instrument d'optique. — H. S. COLEMAN. Critère de qualité d'une image donnée par un instrument soumis au contrôle gouvernemental. Point de vue du contrôleur des spécifications. — A. C. S. VAN HEEL. Applications de la diffraction de Fresnel aux mesures de haute précision. — J. G. BAKER. Structure de l'image et résultats de tests. — G. TORALDO DI FRANCIA. Aspect géométrique et interférentiel du test de Ronchi. — E. INGELSTAM et PER J. LINDBERG. *a*) Méthode et appareillage pour étudier les lentilles (détermination du pouvoir résolvant tangentiel et radial de la distorsion). *b*) Dispositif photoélectrique pour la mesure de la distribution d'intensité dans les images linéaires (parallèles à la fente d'entrée du P. M.). — R. E. HOPKINS, H. KERR, T. LAUROESCH et V. CARPENTER. Mesure de la distribution d'énergie dans les images. — DONALD P. FEDER. Calculs d'optique au N. B. S. (calculs à travers à l'aide des machines à calculer en service. La trajectoire d'un rayon à travers 10 surface est connues en 8 secondes. Influence de surfaces non sphériques..., calculs de diffraction...). — F. E. WASHER. Pouvoir de résolution d'objectifs de photographie aérienne. — E. W. H. SELWYN. Théorie du pouvoir de résolution. — O. H. SCHADE. Un nouveau dispositif pour mesurer la « définition » d'une image. Choix des spécifications. — R. KINGSLAKE. Position du meilleur foyer d'une lentille en présence d'aberration sphérique. — ARTHUR COX. Évaluation de la qualité des images à l'aide de l'image d'un objet « échelon » (frontière entre un espace brillant et un espace parfaitement sombre. — R. V. SHACK. Nouveau mode d'évaluation de la qualité des images, plus conforme aux besoins de l'utilisateur que le pouvoir de résolution.

J. BADOZ.

PIRAUX (H.) **Dictionnaire allemand-français de l'électrotechnique et de l'électronique.** 1 vol. 16 × 25 cm, 147 pages, Eyrolles, Paris, 1100 F.

En donnant ce dictionnaire, où figurent plus de dix mille mots ou expressions relatives à toute une série de branches de la physique et des techniques actuelles, l'auteur continue le très utile travail déjà accompli avec ses dictionnaires anglais-français et français-anglais. Bien que les publications en langue allemande voient, comme celles dans notre langue, leur importance relative diminuer à cause de l'énorme développement de la littérature scientifique et technique en langue anglaise, elles n'en conservent pas moins un intérêt considérable, et ce nouveau dictionnaire en facilitera grandement la lecture.

J. L.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 12
TOME 18, DÉCEMBRE 1957, PAGE 135 A.

LA MODULATION DES COURANTS CONTINUS PAR INTERRUPTEUR A TRANSISTORS

Par J. L. LEROY, C. MABBOUX,
Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences de Caen

On sait que la résistance que présente un transistor à jonctions p n p, monté en collecteur commun, entre ses bornes de sortie E et C (*fig.* 1)

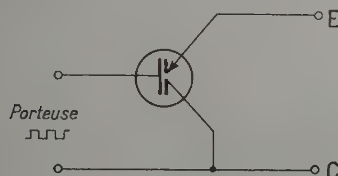


Fig. 1.

est beaucoup plus petite si la tension de base est négative que si elle est positive. Mais une partie de cette tension apparaît à la sortie et ce circuit ne peut servir d'interrupteur que pour des signaux supérieurs au millivolt.

Étude d'un interrupteur équilibré. — Pour obtenir un modulateur utilisable avec des signaux très faibles, on adoptera les dispositions indiquées précédemment (1) : porteuse de forme carrée, mon-

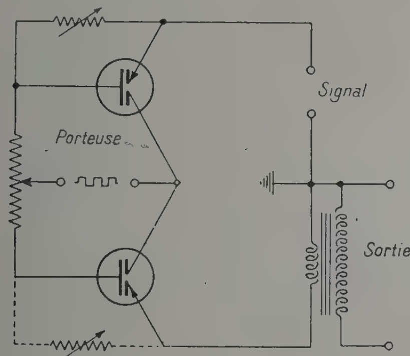


Fig. 2.

tage à deux transistors en opposition, dont on peut améliorer la symétrie à l'aide d'un potentiomètre de 200 ohms environ et d'une résistance variable de l'ordre de 10 000 ohms (*fig.* 2). On arrive alors à réduire le résidu de porteuse à la sortie à l'équivalent d'un signal d'entrée de 5 microvolts environ. On améliore encore le rapport du signal modulé au résidu de porteuse en ne conservant que le fondamental de la tension de sortie : on élimine ainsi des inductions parasites diverses et des pics du résidu de porteuse qui résultent du déséquilibrage momentané de l'interrupteur à chaque basculement. Ce résultat est difficile à obtenir avec un filtre passe bande incorporé au modulateur, car la modulation doit être faite à basse fréquence. Une capacité en parallèle avec le secondaire du transformateur de sortie et un circuit résonnant en série permettent tout de même de réduire le résidu de porteuse à l'équivalent d'un signal d'entrée de moins de 2 micro-volts.

La tension carrée envoyée sur la base peut être obtenue par double écrêtage d'une tension sinusoïdale à 50 périodes. Cependant il est intéressant d'avoir un modulateur autonome : c'est pourquoi nous avons utilisé un multivibrateur à transistors qui, alimenté par une pile de 4,5 volts — dont le débit est de 10 milliampères — fournit entre les collecteurs 0,7 volt de tension carrée de fréquence 77, sous 500 ohms. Un potentiomètre permet d'en régler la valeur moyenne qui doit être légèrement négative si l'on veut que l'impédance d'entrée du modulateur soit suffisamment basse.

L'équilibrage de l'interrupteur dépend de la température des transistors, du niveau et de la fréquence de la porteuse. Après 2 heures de fonctionnement les dérives de zéro du modulateur sont de l'ordre de 3 microvolts par heure. Les variations de gain sont inférieures à 1 % pendant le même temps.

Les défauts de linéarité atteignent $\pm$ 4 % pour des signaux d'entrée continus compris entre 15 microvolts et 5 millivolts. L'interrupteur fonctionne encore avec des signaux de 0,5 volt, mais la modification des polarisations des transistors devient alors sensible et l'impédance d'entrée du modulateur augmente. Celle-ci ne peut d'ailleurs pas être abaissée, pour des signaux inférieurs à 10 millivolts, au-dessous d'une valeur de l'ordre de 20 ohms, car lorsqu'ils sont débloqués les transistors présentent encore entre émetteur et collecteur une résistance de l'ordre de 10 ohms que l'on diminue peu en augmentant la tension négative

(1) Leroy (J. L.), Mabboux (C.), *J. Physique Rad.* (Suppl. Phys. Appl.), juillet 1957, **18**, 106.

appliquée sur la base. Nous avons obtenu une impédance d'entrée de 30 ohms avec deux OC 71 alimentés par une porteuse de 0,7 volt, et un transformateur dont le primaire avait une impédance de 12,5 ohms (celle du secondaire étant de 80 000 ohms). Des transistors à fort gain en courant permettraient d'atteindre une valeur un peu plus basse.

Ce travail a été exécuté au Laboratoire de Physique Corpusculaire de la Faculté des Sciences de Caen sous la direction de M. le Professeur Schérer à qui nous tenons à adresser nos remerciements les plus sincères.

Manuscrit reçu le 9 septembre 1957.

BIBLIOGRAPHIE

Bright (R. L.), Kruper (A. P.), *Electronics*, avril 1955.
Bright (R. L.), *Com. Electron.*, 1955, **17**, 111.
Mundy (R. C. N.), *A. T. E. J.*, G.-B., juillet 1956. **12**, n° 3.
Moulon (J. M.), Les transistrons dans les amplificateurs. Éditions du C. N. E. T., 1956.

REVUE DES LIVRES

Rigal (R.), **L'émission.** (1 vol., 16 × 25 cm, 210 pages, 227 figures, 15 photographies. Éditions Eyrolles, Paris, 1957, 2 200 F.)

Cet ouvrage constitue le premier livre du tome III du cours de Radioélectricité Générale de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications. Après avoir rappelé sommairement le principe de fonctionnement des tout premiers émetteurs, l'auteur étudie les montages de base des oscillateurs haute fréquence à lampes et examine les causes qui peuvent donner naissance à des oscillations parasites.

Les maîtres-oscillateurs sont toujours constitués d'un quartz : aussi est-il consacré tout un chapitre aux propriétés du quartz, aux tailles le plus souvent utilisées, à son schéma électrique équivalent et à son montage en stabilisateur. Son emploi dans les filtres se trouve aussi mentionné. Il faut, une fois obtenue l'onde H. F., y inclure le signal à transporter. Trois chapitres sont consacrés à ce sujet. Le premier traite de la classique modulation d'amplitude, des différents procédés qui la produisent et de leurs rendements respectifs. Un paragraphe met en lumière les mérites de la modulation à bande latérale unique. Le chapitre IV contient, sous le titre modulation de fréquence, outre l'étude des deux systèmes fondamentaux (Armstrong, Lampe à réactance) et la discussion des avantages de l'un et de l'autre, une études des organes propres au récepteur à modulation de fréquence (limiteur, discriminateur). Le chapitre V, d'une quarantaine de pages comme le précédent, fait le point de la question de la modulation par impulsions. On y donne les montages de principe permettant de traduire un signal en impulsions modulées en amplitude, en largeur ou en position, impulsions dont on examine ensuite les spectres de fréquence. Les principes de la modulation codée s'y trouvent aussi exposés. Un résumé des caractéristiques de liaisons multiplex illustre ce chapitre.

Comme il est souvent fait mention, dans ce qui précède, d'ondes de formes diverses (signaux rectangulaires, dents de scie), l'auteur, dans les vingt dernières pages du livre, étudie les générateurs qui les produisent et plus spécialement les multivibrateurs. Nous rappelons que ce livre fait partie d'un cours. Il peut se lire, toutefois indépendamment des autres, mais il s'adresse à des techniciens déjà avertis.

Eugène Dieulesaint.

Guinier (A.), **Théorie et technique de la radiocristallographie.** (2e édition, 1 vol. 16 × 25 cm, 750 p., 350 fig., Dunod, Paris, 1956, relié 9 500 F.)

La seconde édition de cet important traité — le seul en langue française de cette importance et sur ce sujet — était vivement souhaitée par tous ceux qui ont eu à utiliser la première édition, en avaient apprécié le contenu tout en déplorant la présentation. Il s'agit d'un très beau volume, relié toile, dont l'impression, la présentation et l'illustration ne laissent rien à désirer. Par le nombre et l'importance des additions et remaniements, on peut presque dire qu'il s'agit d'un nouveau livre.

Tout en laissant systématiquement de côté le détail de la détermination des structures, pour lequel l'auteur renvoie à d'excellents traités spécialisés, l'ouvrage apporte une documentation abondante et précise à tous ceux qui utilisent les rayons X (Physique des solides, Chimie, Métallographie, etc...). Il s'agit de problèmes tels que l'identification des phases, l'analyse quantitative d'un solide, le mode de cristallisation, les imperfections cristallines, etc...

Parmi les chapitres essentiels ajoutés à la première édition ou amplement complétés, citons l'usage des compteurs Geiger-Muller, la diffusion des rayons X aux très petits angles, la diffraction par les réseaux cristallins imparfaits (divers cas de désordre, agitation thermique, métaux écrouis, etc...). Ce dernier chapitre, qui constitue en fait une mise au point d'un sujet en pleine évolution, sera utile non seulement au technicien éclairé et au chercheur, auxquels l'ouvrage s'adresse particulièrement, mais encore à l'étudiant et au professeur. Il en est de même de nombreux chapitres de ce livre, visiblement rédigé avec autant de soin pédagogique que de préoccupations scientifiques et techniques. Les nécessaires complications mathématiques qui ont dû être introduites pour traiter le sujet avec l'ampleur voulue, sont d'autant moins gênantes qu'un exposé élémentaire précède toujours l'exposé plus approfondi, très clair et très physique. La théorie de la transformation de Fourier, par exemple, qui n'a pas encore reçu dans l'enseignement français la place qui lui revient, est présentée en appendice à l'usage des physiciens. En appendice également, des données numériques et de nombreux tableaux faciliteront les calculs du technicien. Enfin, deux index alphabétiques (auteurs et matières), rendent plus agréable encore l'usage de cet excellent traité.

R. Zouckermann.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

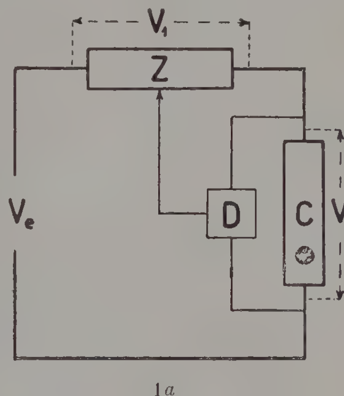
SUPPLÉMENT AU N° 12
TOME 18, DÉCEMBRE 1957, PAGE 137 A.

PROJET ET ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE STABILISATEURS ALTERNATIFS A IMPÉDANCE VARIABLE

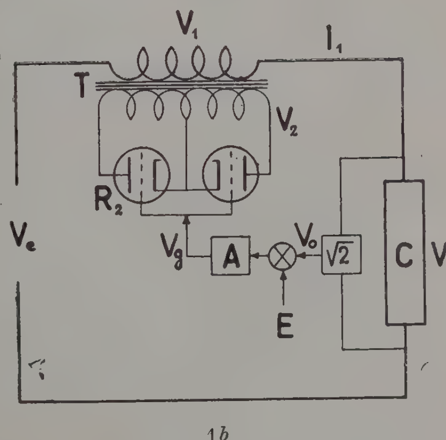
Par F. PERRIER et J. M. CODINA,
Laboratoire d'Optique Électronique du C. N. R. S., Toulouse.

I. **Introduction.** — 1) Il est souvent utile de stabiliser une tension de crête. Cette tension détermine par exemple la valeur de la tension continue fournie par un redresseur. Un type connu de stabilisateur [1] est celui que l'on peut appeler à impédance variable. Nous nous sommes proposés de l'étudier en détail, d'indiquer de façon précise comment conduire le projet et d'en mesurer les performances. Pour prendre un exemple concret nous nous sommes imposés une stabilité de un dix-millième pour des variations de tensions du secteur de plus ou moins 10 %. Pour éviter toute équivoque il faut préciser dès le début que la tension de crête est stabilisée aux dix-millième mais non mesurée au dix-millième ; autrement dit que la tension varie de moins de un dix-millième de part et d'autre d'une valeur que l'on n'a pas cherché à connaître avec une telle précision.

2) Principe des stabilisateurs a impédance variable. — La tension de crête V à stabiliser est comparée à une tension continue de référence E. La différence des deux tensions, amplifiée, modifie une impédance Z en série avec l'appareil aux bornes duquel la tension doit être stabilisée. Les figures 1*a* et 1*b* schématisent le montage sous la forme généralement adoptée pour les systèmes asservis. Sur ces figures, ainsi que dans tout le reste de l'article, les tensions indiquées aux bornes des différentes parties de l'appareil V_e, V_1, V sont les tensions efficaces. Les tensions sont supposées sinusoïdales et les tensions de crête seront désignées en ajoutant l'indice « $_0$ » aux indices déjà employés : on aura par exemple $V_0 = V\sqrt{2}$. Avec ces notations et ces hypothèses la tension du secteur, ou tension d'entrée, V_e est la somme géométrique des tensions V et V_1 ; par conséquent pour maintenir V_0 constant, donc V, il faut que les variations de V_e soient compensées par des variations convenables de V_1, c'est-à-dire par des variations convenables de l'impédance Z. La figure 1*b* montre que l'impédance variable est constituée par un transformateur dont le secondaire débite sur 2 triodes montées en push-pull. Supposons le transformateur parfait débitant au secondaire sur une résistance variable R_2. Le schéma équivalent est représenté sur la figure 2 : une inductance L en parallèle avec



1*a*



1*b*

Fig. 1*a* et 1*b*. — Schéma bloc du stabilisateur.

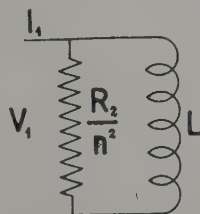


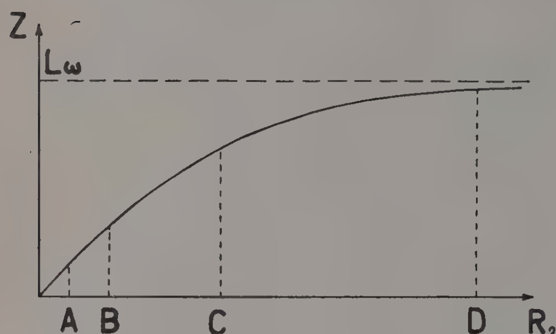
Fig. 2. — Circuit équivalent à l'impédance variable.

[1] On peut le rattacher par exemple au montage employé par Hanson. *Rev. Sc. Instr.*, 1944, **15**, 57.

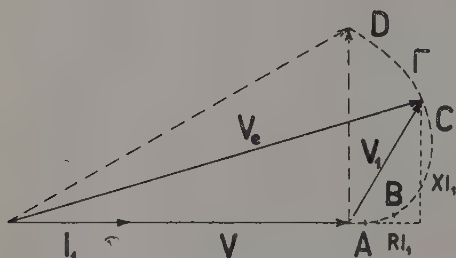
une résistance R_2/n^2, n désignant le rapport de transformation.

Le transformateur est donc équivalent à une impédance Z dont l'argument varie de zéro à 90° quand R_2 varie de zéro à l'infini et dont le module

$$|Z| = \frac{L\omega R_2}{\sqrt{R_2^2 + L^2 \omega^2 n^4}}.$$



3a



3b

FIG. 3a et 3b. — Variations du module Z de l'impédance variable et des tensions V_e et V_1 quand R_2 varie.

Les figures 3a et 3b indiquent, en fonction de R_2 les variations de $|Z|$ et de V_e en supposant le stabilisateur parfait (V constant) et l'intensité primaire I_1 constante également. Dans l'hypothèse du transformateur parfait, le lieu de l'extrémité de Z quand R_2 varie, est un cercle ; il en est de même de l'extrémité de $V_1 = ZI_1$ (*fig.* 3b), donc de l'extrémité de V_e.

Avec un transformateur réel le lieu Γ est voisin d'un cercle, par conséquent V_e passe par un maximum pour un point C de Γ. Il en résulte qu'entre A et C une augmentation de V_e doit être compensée par une augmentation de V_1 pour que V reste constant, tandis qu'entre D et C l'augmentation de V_e doit être compensée par une diminution de V_1. Il faut donc choisir l'une ou l'autre partie de ce lieu ; il est préférable de choisir la partie AC et même, pour ne pas utiliser des tensions V_1 trop fortes qui fatigueraient les lampes, de se limiter à une partie AB du lieu pour laquelle les 3 tensions V, V_e et V_1 sont presque en phase. Dans ces conditions l'accroissement de V_1 est à peu près égal à l'accroissement de V_e qu'il doit compenser. Les valeurs extrêmes de V_1 et de V_e sont donc $V_{1m} = V_{em} - V$ et $V_{1M} = V_{eM} - V$. La limite inférieure A ne peut pratiquement correspondre à une valeur nulle de R_2 ; pour un transformateur donné elle est déterminée par le courant maximum que les lampes peuvent débiter.

II. **Projet du stabilisateur.** — 1) CHOIX DES LAMPES. — Les constructeurs indiquent pour chaque type de lampe la puissance maximum que l'on peut dissiper dans la lampe, la valeur maximum du courant qui peut la traverser, la valeur maximum de la tension anode cathode. Ces 3 conditions vont limiter notre choix puis déterminer les caractéristiques du transformateur. Examinons-les successivement en supposant que les lampes soient des triodes ou des pentodes montées en triodes.

a) *Condition de puissance.* — La puissance dissipée dans l'impédance variable l'est, en partie dans le transformateur, en partie dans les lampes. Pour conduire le projet on peut négliger les pertes dans le fer du transformateur et les pertes dans le primaire ; par contre, si l'on veut que les dimensions du transformateur soient acceptables, il faut tenir compte des pertes dans le secondaire dont la résistance sera comparable à celle des secondaires des transformateurs usuels d'alimentation, c'est-à-dire de quelques centaines d'ohms. On peut se la fixer *a priori ;* désignons-la par r_2 pour chaque demi-secondaire.

La puissance maximum à dissiper dans l'impédance variable est $V_{1M} I_1$, puisque V_1 et I_1 sont supposés en phase quel que soit V_1 ; la moitié de cette valeur doit être perdue dans chaque lampe et chaque demi-secondaire. Pour nous réserver une marge de sécurité, choisissons une lampe qui, à elle seule, serait capable de dissiper cette puissance.

Parmi les lampes qui conviennent on choisira celles dont le courant grille est très faible. Il est commode de choisir des lampes du type « réception » ; pour des puissances importantes on peut évidemment en placer plusieurs en parallèle. Pour simplifier l'exposé supposons que 2 lampes suffisent une sur chacun des demi-secondaires.

b) *Condition d'intensité.* — Désignons par I_{2Max} l'intensité maximum que la lampe choisie peut supporter. Imposons-nous de plus de n'utiliser qu'une tension grille négative ou nulle et supposons le transformateur parfait. Le courant primaire a par hypothèse une valeur efficace constante I_1 par conséquent le courant secondaire a aussi une valeur de crête constante $I_2\sqrt{2}$ qu'il faut choisir. Les caractéristiques d'une triode montrent, qu'à courant anodique constant, la puissance dissipée par la lampe diminue quand la tension grille croît. Si l'on

désigne par p la puissance réellement dissipée dans une lampe, la puissance dissipée dans les deux lampes et dans le secondaire est $2p + r_2 I_2^2$ en désignant par I_2 l'intensité efficace du courant qui circule dans le retour commun aux 2 demi-secondaires. La valeur minimum de cette puissance est $V_{1m} I_1$ d'où $2p = V_{1m} I_1 - r_2 I_2^2$. Traçons, dans le réseau de caractéristiques V, I de la lampe choisie (*fig.* 4) la courbe C d'équation :

$$VI = V_{1m} I_1 - r_2 I_2^2.$$

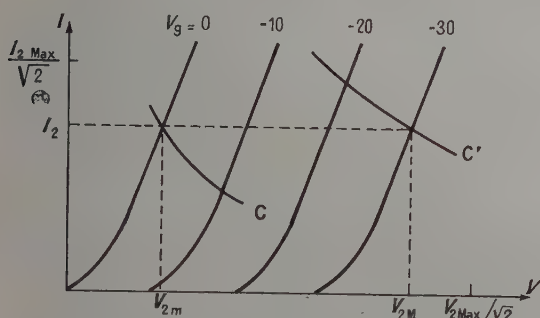


Fig. 4. — Détermination des limites de fonctionnement de la lampe choisie.

Son intersection avec la caractéristique $v_g = 0$ donne la valeur de I_2. Pour que la lampe convienne il faut que $I_2 \sqrt{2}$ soit inférieur à l'intensité maximum que la lampe peut supporter.

c) *Condition de tension.* — Appliquons une construction analogue à la puissance maximum $V_{1M} I_1$ à dissiper. L'intersection de la courbe (C')

$$VI = V_{1M} I_1 - r_2 I_2^2$$

avec la droite $I = I_2$ (*fig.* 4) donne la tension efficace V_{2M} ; il faut que $V_{2M} \sqrt{2}$ soit inférieur à la tension maximum admissible. Il convient de plus que ce point d'intersection tombe dans une région où les caractéristiques soient sensiblement rectilignes.

Remarque. — Nous avons examiné la lampe avec la condition limite $v_g = 0$; si la lampe le permet, c'est-à-dire si la condition de tension est largement satisfaite on pourra choisir une tension maximum de grille négative pour déterminer I_2 ce qui réduira le courant grille. Il ne faudra pas toutefois prendre une valeur trop négative, car il convient pour éviter les déformations que, presque toujours, l'une ou l'autre lampe conduise.

2) Détermination du transformateur. — *a*) Le rapport de transformation $n = I_1/I_2$ est déterminé puisque I_1 est imposé et que nous venons de trouver graphiquement I_2. *b*) Le raisonnement du paragraphe précédent suppose que V_1 et I_1 sont presque en phase ; cela exige donc que $L\omega$ soit toujours grand devant R_2/n^2 (*fig.* 2). Mais si le déphasage est faible R_2/n^2 est très voisin de V_1/I_1 ; sa valeur maximum est donc V_{1M}/I_1 et il faut que l'inductance du primaire excède cette valeur. Il est facile de vérifier que si $L\omega = 4V_{1M}/I_1$ le déphasage est toujours inférieur à 15 degrés c'est-à-dire pratiquement négligeable. *c*) On peut remédier à une réactance $L\omega$ insuffisante par l'emploi d'un condensateur en parallèle sur le primaire ou sur le secondaire, mais il faut éviter de se placer au voisinage de la résonance car la ferrorésonance amènerait une irrégularité de fonctionnement.

3) Voltmètre de crête. — La tension de crête aux bornes de l'appareil d'utilisation est obtenue par un voltmètre de crête qu'il faut étudier avec beaucoup de soin, puisque la précision du stabilisateur ne peut excéder celle du voltmètre. Il faut d'abord redresser les deux alternances, sinon le stabilisateur introduirait une dissymétrie, comme le montrent les enregistrements décrits ci-dessous. Il faut ensuite que la constante de temps CR soit convenablement choisie : trop courte elle produit une déformation de la tension stabilisée, trop longue elle ne permet pas au voltmètre de suivre les variations rapides.

La tension de crête subit en effet des variations périodiques assez rapides dues probablement à des battements entre les tensions fournies par les alternateurs qui alimentent le réseau, il faut pour les supprimer d'abord les détecter. Cela exige qu'au bout d'une alternance la baisse de tension ΔV_0 (*fig.* 5) aux bornes du circuit CR du voltmètre de



Fig. 5. — Comparaison de la variation ΔV_0 aux bornes du voltmètre de crête à la plus grande variation prévue δV_0.

crête soit au moins égale à la plus grande baisse de tension δV_0 qui peut se produire entre deux alternances. Pendant un centième de seconde la variation relative de tension vaut à peu près

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{1}{100\, CR} ;$$

remplaçant ΔV_0 par δV_0 que l'expérience nous donne nous tirons CR. Au laboratoire nous avions δV_0 inférieur à 0,1 volt et comme V_0 est égal à 100 volts nous avons pris $CR = 10$ secondes ; on voit que les constantes de temps sont importantes. Il faut, pour les obtenir, choisir une valeur élevée de la résistance R afin que la résistance de la diode, lorsqu'elle conduit, soit négligeable devant R. On ne peut d'autre part dépasser 1 MΩ parce que cette résistance se trouve aussi sur la grille de la lampe suivante. Cette valeur de R détermine celle de la capacité que nous avons choisie égale à 10 μF.

4) Tension de référence. — L'emploi d'une pile sèche de 108 volts nous a donné toute satisfaction. Il faut placer cette pile dans un boîtier métallique qui la soustrait au rayonnement des lampes et ramène à la masse les éventuels courants de fuite.

5) Amplificateur. — Une expérience préliminaire a montré que, pour compenser une variation donnée de la tension de crête, il fallait produire une variation de tension grille v_g des lampes de puissance environ 1,5 fois plus grande. Comme l'on s'est imposé une stabilité de 10^{-4} pour une variation de 10^{-2} du secteur, il faut réduire les variations au centième. Cette variation se retrouvant à l'entrée de l'amplificateur doit donc produire une variation 150 fois plus grande sur les grilles des lampes de puissance.

Une pentode à grande pente suffit à produire cette amplification de 150 fois. En réalité on en utilise deux pour compenser la dérive, puisque l'amplificateur est continu ; mais on remarquera que les grilles des triodes sont connectées aux deux plaques des pentodes et que par conséquent on utilise l'amplification totale que donnerait une lampe seule.

6) Schéma définitif. — La réunion des parties décrites ci-dessus conduit au schéma de la figure 6. On y remarquera les résistances destinées à limiter le courant grille des EF 42 ou les courants écrans des EL 38 montées en triodes. Le voltmètre de crête est monté comme une valve biplaque, les 2 alternances sont donc traitées de façon symétrique ; on s'est réservé la possibilité de faire varier la valeur de la tension à stabiliser en prenant une fraction convenable de cette tension pour la comparer à la tension de référence fournie par P. Les cathodes des différentes lampes sont à des tensions trop différentes pour qu'on puisse alimenter les filaments en parallèle ; les courants de chauffage sont stabilisés par une lampe fer hydrogène. On voit que l'appareil n'utilise que du matériel courant, à l'exception des 2 transformateurs qu'il a fallu faire bobiner spécialement : celui de l'impédance variable et celui qui fournit les trois chauffages ; ils sont cependant bobinés sur des tôles standard.

7) Exemple concret. — Les mesures faites au laboratoire ont montré que la tension du secteur était toujours comprise entre 110 et 125 volts ; avec les notations précédemment employées nous avons donc $V_{em} = 110$ volts, $V_{eM} = 125$ volts. La tension d'utilisation V est nécessairement inférieure à V_{em} nous choisissons $V = 100$ volts, c'est-à-dire une tension de crête $V_0 \simeq 141$ volts. Mais, en plus des variations lentes, la tension du secteur présente des variations rapides ; l'expérience a montré que les plus rapides étaient inférieures à $\delta V = 0{,}2$ volt par période et nous avons vu comment cette valeur déterminait le voltmètre de crête. Le courant d'utilisation I_1 est supposé constant et égal à 2 ampères. Avec ces valeurs, 2 lampes de puissance suffisent. En effet les constructions précédemment indiquées effectuées sur le réseau de caractéristiques d'une EL 38. montée en triode, donnent $I_2 = 200$ mA ; $V_{eM} = 500$ volts. Ces valeurs conviennent à la lampe choisie qui peut débiter 200 mA et qui admet jusqu'à 800 volts entre anode et cathode. Ces mêmes valeurs conduisent à un transformateur de rapport $n = I_1/I_2 = 20$ et à une tension primaire maximum de $500/20 = 25$ volts. A titre d'expérience, nous avons commandé à un bobineur un transformateur de rapport 20 ; d'intensité primaire 2 ampères et d'intensité secondaire 100 mA, le primaire devant être alimenté sous 25 volts. Il a donc été bobiné comme un transformateur usuel de radio. L'inductance du primaire étant trop faible, nous avons placé sur chaque demi secondaire un condensateur de 0,25 μF. Dans ces conditions la réactance est de 54 ohms et l'inégalité $L\omega \geqslant 4V_{1M}/I_1$ ou $54 \geqslant 4 \times 25/2$ est satisfaite et l'expérience doit vérifier les calculs précédents.

8) Vérification : expériences préliminaires. — Faisons varier V_e avec un alternostat et agissons sur la tension grille des triodes pour maintenir $I_1 = 2$ A, donc $V = 100$ volts, dans un appareil d'utilisation constitué par une résistance de 50 ohms. Pour maintenir I_1 constant lorsque V_e varie de 110 à 126 volts, il a fallu faire varier la tension grille des triodes de 0 à — 30 volts, V_1 a pris les valeurs de 10 et 26 volts comme il était prévu, I_2 était un peu plus faible que calculé (98 et 80 mA),

Dans cet intervalle les 2 lampes se sont donc comportées comme une résistance unique et les 3 tensions V, V_e et V_1 ont été sensiblement en phase. Le déphasage apparaît au contraire si l'on fait fonctionner le stabilisateur hors de la gamme pour laquelle il a été construit. En abaissant la tension grille à — 40 volts on a pu maintenir I_1 constant bien que V_e soit égal à 132 volts, mais la variation de V_1 excède la variation de V_e, ces variations étant respectivement 36 et 32 volts.

III. **Étude expérimentale.** — L'alimentation à travers un alternostat et la mesure de la tension de sortie avec un voltmètre ordinaire ne constituent qu'une vérification grossière susceptible seulement de mettre en évidence une faute de montage. On pourrait employer un voltmètre de crête et opposer à la tension obtenue celle d'une pile de référence, mais nous avons voulu obtenir des renseignements beaucoup plus précis.

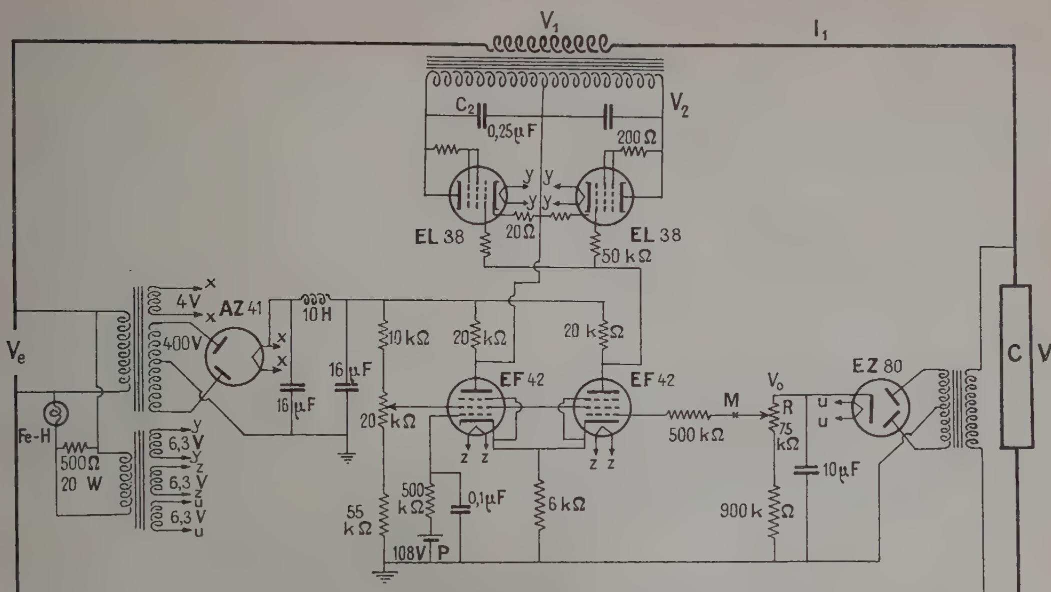


Fig. 6. — Schéma de principe du stabilisateur.

1) Étude des variations rapides de la tension d'entrée. — Nous avons modulé la tension d'entrée appliquée au dispositif de la figure 6 en interposant entre cette entrée et le secteur une deuxième impédance variable identique à celle du stabilisateur, c'est-à-dire constituée, elle aussi, par une transformateur dont le secondaire débite dans deux EL 38 montées en triodes. Les grilles des EL 38 sont attaquées par une tension sinusoïdale fournie par un générateur à très basse fréquence (générateur GB 64 de la Compagnie des compteurs). Si le stabilisateur remplit bien sa fonction, c'est-à-dire maintient dans tout le circuit une intensité constante, les variations périodiques de cette deuxième impédance produisent une variation périodique de la tension appliquée à l'entrée du stabilisateur, c'est-à dire équivalent à l'alimenter avec une tension modulée. Nous avons sur ce principe réalisé l'équivalent d'une alimentation alternative à 120 volts efficaces variant de plus ou moins 3 volts à la fréquence de modulation. Pour déterminer avec précision les variations de crête nous avons utilisé le montage usuel de la sélection d'amplitude qui consiste (*fig.* 7) à appliquer la tension à analyser à une diode en série avec une pile ; le courant traverse la diode quand la tension appliquée est supérieure à la tension de la pile.

Ce courant produit une différence de potentiel dans la résistance de 50 000 ohms, on amplifie cette dernière et l'applique à un oscillographe à styles (oscillographe OSL 81 A de la Compagnie des compteurs).

La figure 8 donne 3 enregistrements ainsi obtenus, sur chacun les tensions d'entrée et de sortie ont été enregistrées simultanément. Rap-

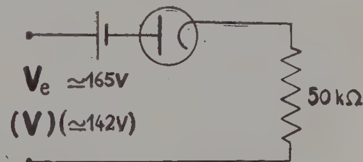


Fig. 7. — Dispositif de sélection d'amplitude utilisé pour les enregistrements des figures 8 et 9.

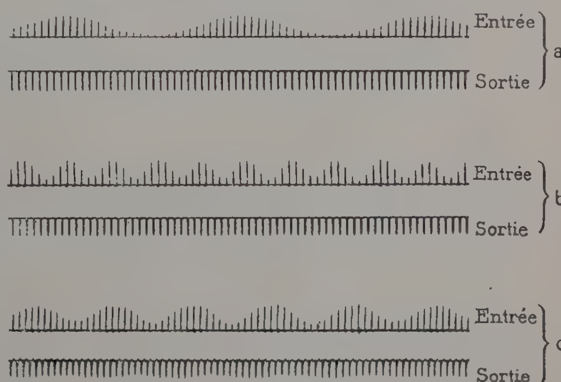


Fig. 8. — Réponse du stabilisateur à une tension modulée; en abscisses la distance entre 2 traits vaut 1/100 de seconde, en ordonnées la modulation vaut environ 3 volts.

pelons que la modulation a une amplitude de 3 volts et que chaque trait correspond à l'extrémité d'une alternance, c'est-à-dire que les traits sont distants

de 1/100 de seconde. Ces 2 valeurs fixent l'échelle du dessin et permettent d'évaluer les performances du stabilisateur. En *a* et *b* l'amplification est la même pour les tensions d'entrée et de sortie et la modulation, très visible sur l'entrée, ne l'est plus sur la sortie. En *c* l'amplification est 5 fois plus grande pour la tension de sortie, l'ondulation devient visible, on peut estimer que le stabilisateur l'a réduite au vingtième de sa valeur à l'entrée. On remarquera que dans ce cas le taux de variation atteint 1 volt par période c'est-à-dire est 20 fois plus grand que celui pour lequel l'appareil a été conçu.

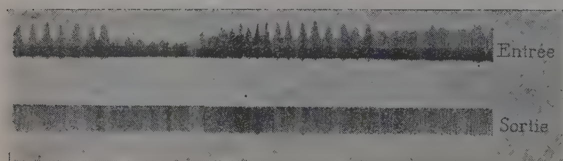


Fig. 9. — Même expérience que la figure 8, mais la vitesse de déroulement est plus faible et la tension d'entrée est le secteur lui-même ; seuls sont enregistrés les sommets des crêtes.

Le cliché 9 a été pris dans les mêmes conditions que les clichés précédents mais le déroulement du film est beaucoup plus lent et l'amplification plus grande. La tension d'entrée est celle du secteur : on y voit les fluctuations presque périodiques dont nous avons déjà parlé.

Ici encore les traits, distants de 1/100 de seconde, fixent l'échelle des abscisses ; en ordonnées la déviation totale vaut environ 1 volt. On remarquera que les fluctuations ont pratiquement disparu à la sortie.

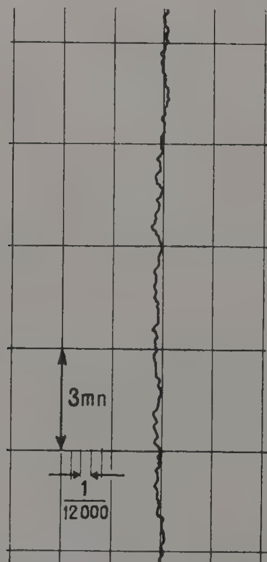


Fig. 10. — Enregistrement des variations lentes.

2) Étude des variations lentes. — Le stabilisateur est alimenté par le secteur, la tension aux bornes de l'appareil d'utilisation est obtenue par un voltmètre de crête. Cette tension est opposée à une pile de référence et la différence des deux est enregistrée avec un millivoltmètre enregistreur Méci. La figure 10 donne un exemple d'enregistrement ; la sensibilité et l'échelle des temps portées sur la figure montrent que sur une durée de 1/4 d'heure la variation de tension n'atteint pas le dix-millième.

3) Stabilité vis-a-vis des variations de charge. — Le stabilisateur a été calculé en supposant au courant qui le traverse une intensité constante, déterminée par la résistance de l'appareil d'utilisation. On peut donc s'attendre à une variation de tension lorsque cette résistance change. Toutefois cette variation doit être faible car le stabilisateur étant un appareil à contre-réaction a certainement une très faible impédance de sortie : c'est bien ce que l'on observe. Lorsqu'on augmente la résistance jusqu'à abaisser l'intensité I_1 du courant de 2 A à 1 A la tension ne change que de 0,01 volt, c'est-à-dire la résistance de sortie est de 0,01 ohm.

4) Détection d'une ou deux alternances. — Nous avons indiqué qu'il convenait de commander le stabilisateur par un voltmètre de crête double, c'est-à-dire détectant les deux alternances.

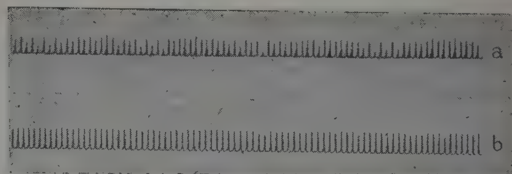


Fig. 11. — Comparaison de la commande par un voltmètre simple (en *a*) et par un voltmètre double (en *b*).

La figure 11 en montre nettement l'intérêt : l'enregistrement 11*a* correspond à l'emploi d'un voltmètre simple, les différences entre les deux alternances sont nettes, seule celle qui est redressée est stabilisée. Les différences entre les deux alternances ont disparu sur le cliché 11*b* qui correspond à l'emploi d'un voltmètre double. On se rappellera que sur ces enregistrements ne se trouvent que les parties supérieures des sinusoïdes, environ la centième partie.

5) Déformation de la tension de sortie. — Si nous négligeons les déformations dues à l'hystérésis du transformateur il reste encore deux causes de déformations : *a*) Le secondaire du transformateur est fermé, non sur une résistance, mais

sur une lampe (en réalité deux en push pull). La caractéristique non linéaire des lampes se traduira par une déformation. Cette déformation sera d'autant plus importante que la lampe demeurera bloquée pendant une partie plus importante de l'alternance. C'est pour la réduire que nous avons choisi de faire travailler la lampe avec une polarisation aussi faible que possible. *b*) La double diode du voltmètre de crête ne débite qu'au voisinage des crêtes, elle produit sur la grille de la pentode amplificatrice une tension discontinue d'allure en dents de scie. Il importe donc de réduire au minimum cette discontinuité ; on y parvient d'abord en redressant les deux alternances au lieu d'une seule puis en augmentant la constante de temps du circuit du voltmètre. La figure 12 montre ces déformations.

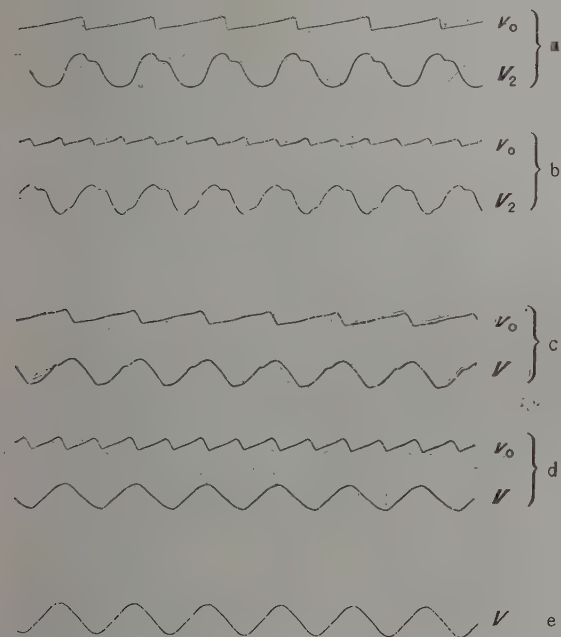


FIG. 12. — Déformation de la tension V_2 aux bornes de l'impédance variable et de la tension d'utilisation V ; v_0 est la tension donnée par le voltmètre de crête. La constante de temps est de 2 s pour les 4 premiers enregistrements et de 10 s pour le 5e ; le voltmètre de crête est simple en *a* et *c*, double en *b*, *d*, *e*.

Les enregistrements *a*, *b*, *c*, *d* ont été obtenus avec une constante de temps de 2 secondes. La déformation est surtout visible sur la tension V_2 aux bornes de l'impédance variable ; une seule alternance est redressée en *a*, les deux alternances sont redressées en *b*, comme le montrent d'ailleurs les variations des tensions grilles v_0. On remarquera que les déformations sont bien moins visibles sur la tension de sortie V, en *c* et *d*, qui correspondent respectivement au redressement d'une et de deux alternances. Ces déformations imposent une limite inférieure à la constante de temps du circuit du voltmètre ; on la prendra aussi grande que le permettent les variations de la tension d'entrée. Nous avons vu qu'avec les conditions imposées la constante de temps pouvait atteindre 10 secondes. L'enregistrement *e* montre que dans ce cas la déformation est très faible.

Conclusion. — Nous espérons avoir montré que le projet de ce type de stabilisateur peut être conduit de façon simple et systématique. Nous en avons indiqué les possibilités et les limites. Facile à construire avec du matériel usuel, il est précieux lorsque les variations de tension sont gênantes. Ajoutons que, construit pour stabiliser les tensions de crête, il stabilise pratiquement aussi les tensions efficaces. Un appareil du même type dans lequel les lampes sont remplacées par des transistors est en construction au laboratoire.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1957.

SUPPLÉMENT AU N° 12
TOME 18, DÉCEMBRE 1957, PAGE 144 A.

CHAUFFAGE PAR INDUCTION H. F. EXISTENCE D'UN COURANT INDUIT ONDULÉ EN RAPPORT AVEC L'EFFET DE " ZÉBRAGE "

Par Louis ABEL,
Laboratoire Régie Renault (Billancourt).

Introduction. — Les études faites jusqu'ici sur le chauffage d'un cylindre ferromagnétique placé dans un inducteur concentrique n'ont fait usage que d'hypothèses trop simples. On considérait un acier ayant une perméabilité constante au moins dans un grand intervalle de champ et de température [3], [4], [5].

De plus, on cherchait une solution des équations de Maxwell, adaptées à ce cas, sans tenir compte de la coordonnée axiale z ; seule la coordonnée polaire r intervenait. Or cette variation axiale du champ induit, même pour un inducteur d'apparence homogène, n'existe pas seulement dans le cas d'un cylindre très court, mais aussi, on va le voir, dans celui d'un cylindre quelconque, que nous supposerons, bien entendu, de révolution.

Ultérieurement même, on pourra déterminer des harmoniques périphériques fonctions de l'angle polaire θ.

Mais la variation du courant (et du champ) induits en fonction de r et de z donne une explication du phénomène de « zébrage », maintes fois observé par des fréquences de l'ordre de 10^5 Hz. Du moins au début du chauffage à haute température et peu avant le point de transformation A_3 des aciers, ou A_2 du fer pur, il y a une alternance de bandes chaudes et froides, formant des cercles parallèles autour du cylindre, sans rapport avec le pas des spires de l'inducteur (si c'est le cas), mais présentant une largeur et un pas peu variables autour d'une moyenne elle-même fonction de la seule fréquence du courant inducteur, en première approximation. Ces « zébrures » se déplacent avec le cylindre si on le déplace axialement dans l'inducteur, ont un pas qui semble un peu varier avec la composition de l'induit, existent quelle que soit la longueur de ce dernier, mais disparaissent rapidement avec la prolongation du chauffage.

Elles ne se produisent pas dans un tube très mince ; mais M. Pomey a pu au Labo R. N. U. R. les maintenir longtemps sur un cylindre creux maintenu par un courant d'eau intérieur à une certaine température.

Nous allons dans le présent travail montrer que l'origine de ce phénomène, jusqu'ici attribué à des causes diverses [2] est d'origine purement électromagnétique. Il existe en plus du champ classique $\vec{H'}$ induit purement axial, un champ $\vec{H}$ ondulé, avec composante radiale, satisfaisant aux équations de Maxwell et aux conditions du contour.

I. Théorie de la décomposition en tubes minces. — Pour étudier les champs induits dans un corps réel, il faut considérer que le cylindre est constitué d'un empilage de viroles très minces ayant chacune une perméabilité μ uniforme et une résistivité ρ uniforme.

En effet, supposons que le champ induit $\mathcal{H}$ ne soit en première approximation fonction que du rayon r. Il en sera de même de la température afférente T. Or μ dépend de $\mathcal{H}$ et de T, et ρ de T. Ces deux facteurs $\mathcal{H}$ et T seront donc supposés constants dans une virole d'épaisseur dr.

On se donne : une valeur de $T =$ Constante au départ, les champs régnants à la surface extérieure d'une telle virole, et on en déduit ceux qui existent à la surface intérieure ; puis on passe à la suivante par les conditions de passage habituelles sur la continuité des champs tangentiels et de l'induction radiale. Soit R le rayon de notre cylindre et n le nombre de viroles. Partant d'un champ $\mathcal{H}$ à la surface de l'une d'elles, on arrive à : $\mathcal{H} - \frac{R}{n}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}$ à l'intérieur (d'où l'on déduit la perméabilité de la virole suivante) ; on commet une erreur de l'ordre de $1/n^2$. Si donc n est très grand, l'erreur sera aussi faible que l'on veut. Le procédé est convergent, tant que les champs sont réguliers. Nous verrons plus loin l'élimination d'une singularité en $r = 0$.

Des champs on tire le courant ainsi induit, qui, déterminé point par point dans le cylindre, y provoque pendant le très court instant Δt des élévations ΔT de température. On peut alors reprendre chaque virole avec les conditions nouvelles μ, ρ fonctions de $T + \Delta T$ [1], $\mathcal{H} + \Delta\mathcal{H}$ (cf. § III D, 2°).

En résumé nous procéderons comme suit :

A) Nous présupposons que le champ résultant $\mathcal{H}$ peut être assez peu variable dans la virole pour que l'on ait $\mu =$ Cte, $\rho =$ Cte ; au moins pendant

[1] Sa chaleur spécifique qui intervient dans l'échauffement varie aussi avec T.

un intervalle court Δt : La température de la virole est uniforme et fixe pendant Δt.

B) On pourra ensuite faire une meilleure approximation en admettant que T et par suite μ est variable en z (ρ varie relativement peu avec T)

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \cos lz.$$

Dans les deux cas on suppose déjà connue la répartition $T(r)$ pour le début.

Champs et courants comprendront alors une petite portion qui sera elle aussi en $\cos lz.f(r)$. μ_0 et μ_1 seront constantes dans une virole donnée ; mais alors μ n'étant plus constant en z on devra remplacer div $\mathcal{H} = 0$ par div $\mathcal{B} = 0$, ce qui entraîne

$$\text{div}\, \mathcal{H} = -\frac{1}{\mu}\left[\mathcal{H}_z \frac{\partial \mu}{\partial_z}\right]$$

puisque μ_0 et μ_1 ne dépendent pas de r.

On voit qu'il y a là une deuxième approximation ; on pourrait aller plus loin en se donnent une loi pour ρ etc., ce que nous ne ferons pas (cf. IV).

II. **Bases des calculs.** — A) Notations. — Indices : f (fer), a (air) :

Coordonnées cylindriques r, θ, z ; temps t.

Température T, chaleur spécifique C ; énergie W (par cm² de surface).

Champs magnétiques	$H(H_r\, H_0\, H_z)$ $H'(H'_z)$	total $\mathcal{H}$. Induction $\mathcal{B} = \mathcal{H} + 4\pi J$.
Champs électriques	$E(E_0)$ $E'(E'_0)\theta$	total $\mathcal{E}$. Induction $\equiv \mathcal{E}$

Propriétés magnétiques : f, fréquence ; pas des champs, $\lambda = 2\pi/l$; $\omega = 2\pi f$; c vitesse de la lumière ; S densité de courant ; ρ résistivité ; μ perméabilité (u. e. m.) ; $\alpha^2 = \dfrac{4\pi\mu\omega}{c^2 \rho} = \mu_0 \gamma^2$ « épaisseur de peau » $e = 1/\alpha$.

Opérations : Laplacien

$$\Delta_c = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Divergence : $\text{div} = \left[\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\right] H + \dfrac{\partial Hz}{\partial z}$

Rotationnel : Rot (v. ci-dessous).

Rayons : R, extérieur du cylindre ; r, valeur courante.

B) Calculs de départ. — On a dans le système de coordonnées choisi :

$$\text{Rot}_r\, V = \frac{\partial V\theta}{\partial z} - \frac{\partial Vz}{r\partial\theta} \qquad \text{Rot}_\theta\, V = \frac{\partial Vz}{\partial r} - \frac{\partial Vr}{\partial z},$$

$$\text{Rot}_z\, \mathbf{V} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial Vr}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rV_0\, V_\theta)\right) \quad (1)$$

$$\text{Div}\, \mathbf{V} = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial V\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial_z} rV_z\right] \quad (2)$$

$$\text{Rot}_r\, \overline{\text{Rot}}\, \mathbf{V} = -\Delta c\, V_r + \overline{\text{grad}_r}\, \text{div}\, \mathbf{V} + \frac{Vr}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V\theta}{\partial \theta}$$

$$\text{Rot}_\theta\, \overline{\text{Rot}}\, \mathbf{V} = -\Delta c\, V_\theta + \overline{\text{grad}_\theta}\, \text{div}\, \mathbf{V} + \frac{V\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial Vr}{\partial \theta}$$

$$\text{Rot}_z\, \overline{\text{Rot}}\, \mathbf{V} = -\Delta c\, V_z + \overline{\text{grad}_z}\, \text{div}\, \mathbf{V}. \quad (3)$$

Ce qui vérifie bien que div Rot Rot $V \equiv 0$.

Équations de Maxwell

$$\overline{\text{Rot}}\, \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} S + \frac{1}{4\pi}\frac{d\mathcal{E}}{\partial t}, \qquad \text{Rot}\, \mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\, \mathcal{E} = 0 \qquad \text{div}\, \mathcal{B} = 0. \quad (4)$$

Équations fondamentales du champ magnétique :

— Dans l'acier on néglige $\dfrac{\partial \mathcal{E}_{(f)}}{\partial t}$ devant $\dfrac{4\pi\, \mathbf{S}}{c}$.

— Dans l'air on maintient le courant de déplacement $\dfrac{d\mathcal{E}_{(a)}}{\partial t}$ seul.

La négligence dans l'acier suppose qu'en u. e. m. ρ est très faible. Ce qui limite $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ c'est que f est au maximum de l'ordre du MHz.

1° *Cas de l'acier.* — Nous admettons que le champ est de la forme :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(r)\, e^{\pm i\omega t}\, e^{\pm ilz}, \qquad (\tilde{\mathcal{H}} \text{ n'étant pas égal à } \mathcal{H}\ !)$$

de sorte que les équations de Maxwell deviennent : avec (3) :

$$\left[\Delta c\, \tilde{\mathcal{H}}r - \frac{\partial}{\partial r}\text{div}\, \tilde{\mathcal{H}} - \frac{\tilde{\mathcal{H}}r}{r^2} = \overset{*}{\pm}\, i\alpha^2 \tilde{\mathcal{H}}r\right] e^{\overset{*}{\pm} i\omega t}\, e^{\pm ilz} \quad (5)$$

et

$$\left[\Delta c\, \tilde{\mathcal{H}}z - \frac{\partial}{\partial z}\text{div}\, \tilde{\mathcal{H}} = \overset{*}{\pm}\, i\alpha^2 \tilde{\mathcal{H}}z\right] e^{\overset{*}{\pm} i\omega t}\, e^{\pm ilz} \quad (6)$$

les signes surmontés d'une * se correspondant.

L'équation en θ est par ailleurs identiquement satisfaite.

A noter qu'on admet toujours que μ est indépendant de t malgré le champ en $\cos \omega t$.

Le cas classique est celui où $\tilde{\mathcal{H}}_r = 0$ et $\mu = c^{te}$; on a alors

$$l = 0, \qquad \tilde{\mathcal{H}}_z \equiv H' \qquad (\text{div}\, \tilde{\mathcal{H}} = 0).$$

2° *Entrefer.* — Les conditions de passage des champs entre deux matières doivent permettre de passer du champ $\mathcal{H}_{(f)}$ au champ dans l'inducteur par l'intermédiaire $\mathcal{H}_{(a)}$. De même pour le champ $\mathcal{E}$.

Or nous admettons que la partie ondulée $H_{(f)}$ est faible ; on verra de plus que $\dfrac{H_{rf}}{H_{zf}}$ est petit : donc $H_{r(f)}$ est extrêmement petit et $H_{r(a)} = \mu H_{rf}$ ne sera pas considérable. Il n'est donc pas besoin de faire des hypothèses extraordinaires sur l'inducteur,

Les courants vagabonds qui y résident, et les champs de fuite dans le cas où il est en spirale, pourront facilement satisfaire aux conditions ci-dessus. D'ailleurs les gradients des champs sont très grands à la surface de l'inducteur ; et s'annulent rapidement ainsi que les champs radiaux à l'intérieur.

3° *Extrémités.* — Supposées très éloignées et sans action (cas du tore de grand rayon).

III. **1er cas de calcul des champs.** — Perméabilité indépendante de z

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0. \qquad (7)$$

A) Champ dans le cylindre (l'indice f ne sera pas mis).

Nous limitant au champ ondulé, nous prenons $\tilde{\mathcal{H}} = H$ et les équations (5) fournissent la solution

$$Hz = (B_0\, J_0(kr) + D_0\, Y_0(kr))\, e^{\pm i\omega t}\, e^{\pm ilz} \quad [6] \qquad (8)$$
$$Hr = (B_1\, J_1(kr) + D_1\, Y_1(kr))\, e^{\pm i\omega t}\, e^{\pm ilz}$$

avec $k = \sqrt{-\,i\alpha^2 - l^2}$ pour $e^{i\omega t}$

ou $k^* = \sqrt{i\alpha^2 - l^2}$ pour $e^{-i\omega t}$ (9)

et J_0, J_1 fonction de Hankel d'ordre zéro ou un, régulière en $r = 0$ pour argt complexe,

[8] Y_0, Y_1 fonction de Neumann d'ordre zéro ou un irrégulière en $r = 0$ pour argt complexe.

On vérifie la condition $\operatorname{div} \mathcal{H} = 0$ en prenant

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{D_1}{D_0} = \frac{il}{k}. \qquad (10)$$

Il est plus simple de combiner dès à présent les deux solutions en $e^{\pm ilz}$ pour remplacer ce coefficient par une fonction circulaire ; on obtient d'après (6) :

$$\begin{aligned} Hz &= (B_0\, J_0 + D_0\, Y_0)\, e^{\pm i\omega t} \operatorname{Cos} lz \\ Hr &= (B_1\, J_1 + D_1\, Y_1)\, e^{\pm i\omega t} \operatorname{Sin} lz. \end{aligned} \qquad (11)$$

On verra que le pas des zébrures, c'est-à-dire $2\pi/l$ étant beaucoup plus grand que l'« épaisseur de peau » $e = 1/\alpha$, on a d'après (10)

$$Hr \ll Hz$$

On posera désormais

$$B_0 = B = b + i\beta \qquad (B^* = b - i\beta)$$

et

$$D_0 = D = d + i\delta \qquad (D^* = d - i\delta).$$

Le champ électrique, nécessairement circonférentiel d'après (4) et (11)

est $E_\theta = \dfrac{c}{4\pi}\rho \operatorname{rot} \mathbf{H}$

$$= -\frac{c\rho}{4\pi} k + \frac{l^2}{k} (BJ_1 + DY_1) \operatorname{Cos} lz\, e^{\pm i\omega t} = \frac{i\mu\omega}{c} H_r \operatorname{ctg} lz. \qquad (12)$$

B) Champ dans l'air. — On ne mettra pas non plus l'indice a.

Il faut connaître ce champ pour pouvoir appliquer les conditions de passage de l'entrefer à la virole la plus extérieure, où le champ H a été déterminé en A.

D'après les hypothèses énoncées au § II, B, les équations (3) et (4) deviennent

$$\begin{aligned} &\left(\Delta c\, Hr + \frac{Hr}{r^2} = -\frac{\omega^2}{4\pi c} Hr\right) e^{\pm i\omega t}\, e^{\pm ilz} \\ &\left(\Delta c\, Hz \qquad = -\frac{\omega^2}{4\pi c} Hz\right) e^{\pm i\omega t}\, e^{\pm ilz} \end{aligned} \qquad (13)$$

fournissant les solutions analogues à (11) :

$$\begin{aligned} Hz &= [B'\, J_0(mr) + D'\, Y_0(mr)]\, e^{\pm i\omega t} \operatorname{Cos} lz \\ Hr &= [B'\, J_1(mr) + D'\, Y_1(mr)]\, e^{\pm i\omega t} \operatorname{Sin} lz \times l/m, \end{aligned} \qquad (14)$$

où $m = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{4\pi c} - l^2}.$ (15)

Ni dans (11) ni dans (13) le signe de i dans $e^{i\omega t}$ ne change quoique ce soit aux fonctions de z.

Comme $l^2 \ll \alpha^2 = \dfrac{4\pi\mu\omega}{c^2\rho}$, on a

$$l^2 \ll \frac{\omega^2}{4\pi c}$$

($\omega > 10^5$, $\mu < 100$ et bien que $\rho \ll 1$, $c\rho\omega \gg \mu \times 16\pi^2$.

Donc m sera réel et nous poserons comme en A) :

$$B' = b' + i\beta' \qquad D' = d' + i\delta'.$$

Le champ électrique E_θ est tel que

$$\operatorname{Rot} H = \frac{1}{4\pi} i\omega E \quad \text{ou}$$

$$-\operatorname{Cos} lz\, (B'\, J_1 + D'\, Y_1)\, (m + l^2/m) = \frac{i\omega}{4\pi} E$$

$$E_\theta = \frac{\omega}{mc} (B'\, J_1 + D'\, Y_1)\, e^{\pm i\omega t} \operatorname{Cos} lz = \frac{i\omega}{cl} H_r \operatorname{ctg} lz. \qquad (16)$$

C) Conditions de passage successives. — Il va falloir les appliquer :

— de l'entrefer à la 1re virole ;
— de chaque virole à la suivante ;
— de la dernière à la région axiale.

On va voir que l'on a ainsi à considérer un produit d'un nombre très grand de transformations linéaires très voisines de l'unité [2].

La transformation produit $\mathcal{T} = \prod_1^n \mathcal{T}_i$ est convergente pour $n \to \infty$.

[2] Il y a en effet presque continuité entre les viroles minces ; toutefois ce n'est pas le cas pour le passage air-acier.

Passant d'un milieu (1) à un milieu (2) on doit avoir :

conservation du champ tangentiel $H_z^{(1)} = H_z^{(2)}$

conservation de l'induction radiale $\mu_1 H_r^{(1)} = \mu_2 H_r^{(2)}$

conservation du champ électrique circonférentiel $E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(2)}$ (17)

à la surface de séparation.

Mais en vertu de (16) la dernière condition résulte de la seconde sauf pour $l = 0$.

Il faut donc procéder séparément pour H et H'.

Il faut évidemment que l et ω soient constants en r. Nous allons donc écrire les lois de passage d'un milieu (1) a un milieu (2) pour le champ $H(r, z)$ en assurant à la surface de séparation :

— la disparition des parties imaginaires ($\mathcal{I}$) des champs ;

— la concordance des parties réelles ($\mathcal{R}$) des champs, suivant (17) ;

— la concordance des phases de ces dernières.

On aura ainsi d'après (17) et (11) :

$$\mathrm{Cos}\, lz \begin{bmatrix} B_1\, J_0(k_1\, r) + D_1\, Y_0(k_1\, r) \\ = B_2\, J_0(k_2\, r) + D_2\, Y_0(k_2\, r) \end{bmatrix} e^{+i\omega t},$$

$$e^{+i\omega t} \frac{il}{k_1} \mu_1 [\mathrm{Sin}\, lz\, [B_1\, J_1(k_1\, r)] + D_1\, Y_1(k_1\, r)]$$

$$= [B_2\, J_1(k_2\, r) + D_2\, Y_1(k_2\, r)]\, e^{+i\omega t} \frac{il}{k_2} \mu_2\, \mathrm{Sin}\, lz \quad (18)$$

respectivement pour H_z et H_r.

Si l'on prenait les solutions en $e^{-i\omega t}$, il faudrait remplacer les k par k^*. N'écrivant plus la lettre r pour simplifier, cela devient pour le champ axial :

$$\mathrm{Cos}\, \omega t \begin{pmatrix} b_1\, \mathcal{R}\, J_0(k_1) - \beta\, \mathcal{I}\, J_0(k_1) \\ \qquad + d_1\, \mathcal{R}\, Y_0(k_1) - \delta_1\, \mathcal{I}\, Y_0(k_1) \\ + i(\beta_1\, \mathcal{R}\, J_0(k_1) + b_1\, \mathcal{I}\, J_0(k_1) \\ \qquad + \delta_1\, \mathcal{R}\, Y_0(k_1) + d_1\, \mathcal{I}\, Y_0(k_1)) \end{pmatrix}$$

$$+ \mathrm{Sin}\, \omega t \begin{pmatrix} -(\beta_1\, \mathcal{R}\, J_0(k_1) + b_1\, \mathcal{I}\, J_0(k_1)) \\ \qquad - (\delta_1\, \mathcal{R}\, Y_0(k_1) + d_1\, \mathcal{I}\, (Y_0(k_1)() \\ + i(b_1\, \mathcal{R}\, J_0(k_1) - \beta_1\, \mathcal{I}\, J_0(k_1) \\ \qquad + i(d_1\, \mathcal{R}\, Y_0(k_1) - \delta_1\, \mathcal{I}\, (Y_0(k_1)) \end{pmatrix}$$

expression égale à une analogue où les indices des coefficients $b, \ldots \delta$ sont remplacés par les indices 2, et k_1 est remplacé par k_2.

Prenant maintenant la solution en $e^{-i\omega t}$, et les fonctions de l'argument k_1^* (ou k_2^*), on a les mêmes expressions où i est remplacé par $-i$ puisque $J_0(k^* r) = \mathcal{R}\, J_0(kr) - i\mathcal{I} J_0(kr)$ par exemple.

Ajoutant membre à membre, les parties imaginaires disparaissent. Si maintenant on sépare les membres réels résultants en deux parties, l'une en cos ωt, l'autre en sin ωt, et que l'on égale les parties respectives, on obtient les deux équations :

$$b_1\, \mathcal{R} J_0(k_1) - \beta_1\, \mathcal{I} J_0(k_1) + d_1\, \mathcal{R}\, Y_0(k_1) - \delta_1\, \mathcal{I} Y_0(k_1) =$$
$$b_2\, \mathcal{R} J_0(k_2) - \beta_2\, \mathcal{I} J_0(k_2) + d_2\, \mathcal{R}\, Y_0(k_2) - \delta_2\, \mathcal{I} Y_0(k_2)$$

et

$$\beta_1\, \mathcal{R} J_0(k_1) + b_1\, \mathcal{I} J_0(k_1) + \delta_1\, \mathcal{R}\, Y_0(k_1) + d_1\, \mathcal{I} Y_0(k_1) =$$
$$\beta_2\, \mathcal{R} J_0(k_2) + b_2\, \mathcal{I} J_0(k_2) + \delta_2\, \mathcal{R}\, Y_0(k_2) + d_2\, \mathcal{I} Y_0(k_2), \quad (19)$$

pour le champ axial.

On opérerait exactement de même pour le champ radial ; on aurait seulement les fonctions de Bessel Y_1, J_1, à la place de Y_0 et J_0 et les 2[es] membres seraient multipliés par le coefficient $\dfrac{\mu_2\, k_1}{\mu_1\, k_2}$.

Connaissant $b_1 \ldots\ldots \delta_1$, k_1, on a 4 équations qui permettent, connaissant k_2, de déterminer $b_2 \ldots\ldots \delta_2$. En effet, ces 4 équations ne sont pas homogènes, et n'on pas un déterminant nul relativement aux inconnues $b_2\, d_2\, \beta_2\, \delta_2$. On peut le voir rapidement ; en effet, considérons deux milieux $(j, j+1)$ constitués par des viroles extrêmement minces de natures infiniment voisines : à la limite les équations du genre (19) constituent une transformation identique $\mathcal{T}_j$. Son déterminant a une valeur finie. En réalité, nos deux viroles sont légèrement différentes, leur épaisseur étant finie ; $\mathcal{T}_j$ ne va plus être l'identité, mais en différer d'aussi peu que l'on veut. Comme elle est continue, son déterminant l'est aussi : il ne peut donc passer d'une valeur finie à zéro.

Ce qui est vrai pour $\mathcal{T}_j$ l'est aussi pour

$$\mathcal{T} = \prod_1^n \mathcal{T}_j, \quad n \to \infty.$$

En effet, on peut considérer le cas d'un cylindre creux à l'intérieur duquel est le champ inducteur. Nous aurons à effectuer la transformation $\mathcal{T}^{-1}$, pour passer au champ extérieur. Il est bien clair que si le déterminant de l'une était nul, celui de l'autre serait infini. Or elles sont convergentes d'après ce que l'on a dit au § I. Donc même si n est infini le déterminant de $\mathcal{T}$ sera fini $\neq 0$.

Appliquons ce qui précède, c'est-à-dire les résultats (19) et leurs conséquences, aux différents passages.

1° *Air-acier.* — Nous nous donnons le champ dans l'entrefer au contact du cylindre (le temps de validité Δt est assez court pour que la réactivité ne varie pas)

$$\begin{cases} H_z^{(a)} = \mathrm{Cos}\, lz\, \mathrm{Cos}\, \omega t [B'\, J_0(mR) + D'\, Y_0(mr)] \\ \qquad + \mathrm{Cos}\, lz\, \mathrm{Sin}\, \omega t [B'\, J_0(mr) + D'\, Y_0(mr)], \text{ et} \\ H_r^{(a)}, \text{ où Cos } lz \text{ est à remplacer par Sin } lz,\ J_0,\ Y_0 \\ \qquad\qquad \text{par } J_1\, Y_1. \end{cases} \quad (20)$$

Appliquant la 1[re] transformation, $\mathcal{T}_1$, on passe de l'air (milieu $j = 0$) à la 1[re] virole ($r = R$) (milieu $j = 1$). Ce sont les équations (19) où m remplace k_1, k_1 (1[re] virole) remplace k_2.

Dans l'air on prend $\mu_a = 1$.

2° *Dans l'acier.* — Le passage d'une virole j à la suivante $j + 1$ se fait d'après les équations (19).

On calcule ensuite les $J_0 \ldots . Y_1$ pour l'argument r_{j+1} de la frontière entre $j+1$ et $j+2$. Les coefficient des transformations $\mathcal{T}_j$ varient donc pour chaque valeur de j.

Tout cela se fait bien entendu dans les conditions énoncées au § I, A.

3° *Virole centrale* N $(r = 0)$. — Qu'elle soit constituée par de l'acier ou de l'air, il va falloir annuler les coefficients des fonctions de Neumann, irrégulières en $r = 0$.

Aucun des k_j n'a été nul (l est réel, $i\alpha$ complexe) donc aucun des arguments $k_j r_j$ ne l'a été ; mais ici $r_N = 0$.

Or nous avons par application de la transformation $\mathcal{T} : (b_N, d_N, \beta_N, \delta_N) = \mathcal{T}(b', d', \beta', \delta')$ avec $D\mathcal{T} = 0$.

Nous pouvons donc toujours choisir b', d', β', δ' de manière à annuler d_N et δ_N. En effet le système d'équations précédent comprend 4 inconnues, les coefficients étant fonctions des données $b' \ldots \delta'$ et fonctions linéaires. Ou si l'on veut, on peut partir de $b_N, \beta_N, 0{,}0$ et en déduire $b' \ldots \delta'$ par $\mathcal{T}^{-1}$; on aurait alors *deux arbitraires*. D'où le résultat :

On pourra toujours déterminer un champ ondulé satisfaisant aux conditions physiques, à une condition sur l'inducteur, et la grandeur efficace du champ principal $H_z^{(a)}$ par exemple, le champ classique H' non ondulé étant pris pour unité.

On prendra par exemple comme condition sur l'inducteur

$$|H_r^{(a)}| = \frac{H(b', d', \beta', \delta', J_1(mR_1), Y_1(mR_1))}{H'} \text{ minimum.}$$

L'expression (20) montre d'ailleurs que l'on peut disposer de la phase du champ sur l'inducteur ; il suffit de faire le changement $t' = t + \varphi$. Une quantité de la forme F Cos $\omega t + G$ Sin ωt se transforme en H Cos $\omega(t' - \varphi)$.

D) Remarques diverses. — 1° *Le cas du champ non ondulé*. — Remarquons que le cas classique où μ et ρ sont uniformément constants diffère du précédent dans le remplacement de $\mathcal{T}$ par $\mathcal{T}_1$ seule ; en général d' et δ' seront $\neq 0$. Les formules données par certains auteurs [3] sont peut-être inexactes.

Le champ non ondulé H'_z se calcule à peu près de la même manière que H_z ; il suffit de faire $l = 0$ et ensuite,

$$\overrightarrow{\mathcal{H}} = \mathbf{H} + \mathbf{H}', \quad \text{avec} \quad |\mathbf{H}'| = h|\mathbf{H}| \quad (h \gg 1).$$

On remplace la condition (19) afférente à H_r par une condition pour E'_θ.

2° *Calcul sur machine*. — Supposons maintenant que nous disposions d'une table complète des valeurs de μ en fonction de $\mathcal{H}$, T et de ρ en fonction de T [9] (³).

Fixons H'^{a}_z et $H_z^{(a)} = \dfrac{H'^{(a)}}{h}$ dans l'entrefer, c'est-à-dire l'intensité de force inductrice. On en déduit déjà la perméabilité μ de la virole extérieure, puisque le champ radial μ étant faible, le champ total y sera à peu près $H'^{(a)}_z(1 + 1/h)$. Au départ on se donne la forme (14) de ce champ, qui est toujours fort (sans quoi la lenteur du chauffage empêcherait la formation des zébrures par diffusion thermique). De plus à la température de départ μ varie peu avec $\mathcal{H}$.

Les transformations $\mathcal{T}_j$ pourraient alors être faites sur machine automatique, avec des sous-programmes déjà compliqués. On opérerait sur le champ total $\mathcal{H}_j^{(t)}$. La machine trouverait dans nos tables, pour une virole possédant un $\mathcal{H}_j$ et un T_j connus, les valeurs de μ et ρ. Elle calculera alors les $\mathcal{H}_j^{(t)}$ $\mathcal{S}_j^{(t)}$ d'où T_j du cycle suivant, etc....

Mais il faudrait déjà un calcul d'essai pour déterminer la valeur des intervalles de découpage Δr et ΔT. Ensuite il sera impossible d'annuler d_N, δ_N à la virole centrale pour supprimer les singularités. Cependant on peut prendre le rayon r_N assez grand pour que $Y(k_N r_N)$ soit borné ; il suffit que la machine fournisse à part les valeurs des coefficients d_N, δ_N. On s'assurerait qu'ils sont assez faibles, et leur suppression ne changerait à peu près rien aux champs dans la région extérieure. Sinon il faudrait recommencer des cycles avec d'autres données dans l'entrefer ($b' \ldots . \delta'$) constituant les champs $\mathcal{H}^{(a)}$ dont on est parti.

E) Calcul de l'énergie W (reçue par cm²). — Soit un segment cylindrique ayant son axe sur oz et sa base de 1 cm $\times$ 1 cm sur la surface du cylindre entre les cotes z_1 et z_2.

1° *Théorème de Pointing*. — Le théorème de Pointing dit que W ne dépend que des champs axiaux et courants en $r = R$. Cependant il peut nous paraître un peu surprenant ici, vu l'hétérogénéité de notre cylindre. C'est pourquoi nous allons le redémontrer [4], [11].

a) *Cylindre homogène*. — Il est inutile de répéter la démonstration classique qui peut être faite d'après la forme des champs donnée en (11) (cf. [8], p. 381).

Par intégration de

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{d}t\, A\rho \int_0^R \mathcal{S}^2\, r\, \mathrm{d}r \text{ (⁴)},$$

(³) Éventuellement de la chaleur spécifique.

(⁴) A est un coefficient qui tient compte des diverses constantes, notamment des unités.

on obtient :

W totale reçue/cm² de surface retenue $= A\rho R \mathcal{R}e \mathcal{H}_z \times Re \mathcal{S}$	$(r = R)$	(21)

quantité qui varie d'ailleurs comme

$$\mathrm{Cos}^2\, lz . f \frac{\alpha^2}{k} \sim \mathrm{Cos}^2\, lz \sqrt{\mu\rho f}$$

en vertu de $l^2 \ll \alpha^2$ relation vraie quelle que soit $l \geqslant 0$.

En revanche, l'énergie purement superficielle (cm³, c'est-à-dire dans le segment cylindrique annulaire très mince, placé à la surface) varie comme $\rho\alpha^2 \# \mu f$ [12]. (Ces variations s'entendent proportionnellement au champ $\mathcal{H}_{(a)}$ dans l'entrefer).

b) *Cylindre décomposé en viroles.* — Considérons la suite des viroles j du § 1.

$r_{j-1} > r > R_j$ avec $l_0 \lesssim_1 \mu_{j-1}\ \mathcal{H}_{j-1}\ \mathcal{S}_{j-1}$ en R_{j-1} etc

L'énergie reçue par la virole j est

$$W_j = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{d}t \int_{R_j}^{R_{j-1}} \rho\, \mathcal{S}_j^2(r)\, r\, \mathrm{d}r$$
$$= P_{j-1} R_{j-1} \mathcal{R}\mathcal{H}_{j-1} \times \mathcal{R}\mathcal{S}_{j-1} - P_j R_j \mathcal{R}\mathcal{H}_j \times \mathcal{R}\mathcal{S}_j.$$

Comme la virole centrale $j = N$ ne comporte pas de courant en raison de $\mathrm{d}H/\mathrm{d}r = 0$ $(r = 0)$, on voit immédiatement qu'il suffit d'additionner toutes les expressions W_j pour retomber sur W_0.

2° *Cylindre réel.* — D'après (11) et (19) on calcule

$$\mathcal{R}\mathcal{H}_z . \mathcal{R}\mathcal{S} = A\rho \frac{\alpha^2}{(\alpha^4 + l^4)^{1/4}} \mathrm{Cos}^2\, lz\, f(R)$$

que l soit nul ou non.

$f_{(r)}$ est proportionnel au champ $H_{(a)}$ ou $H'_{(a)}$ dans l'entrefer, et est une fonction très compliquée de la forme (14) des champs.

Si maintenant en fait $\mathcal{H} = H + H'$, on va avoir

$$W = A\rho R \text{ Moy } t\, \mathcal{R}_e \mathcal{H} . \mathcal{R}_e \mathcal{S}$$

$$\boxed{W = M\, \mathbf{H}'^2_{(a)} + N \mathbf{H}^2_{(a)} \mathrm{Cos}^2\, lz + P\, \mathbf{H}_{(a)} \mathbf{H}'_{(a)} \mathrm{Cos}\, lz} \quad (22)$$

On voit que W varie en gros comme $\rho\alpha$, que $\mathbf{H}^2_{(a)} \ll \mathbf{H}'^2_{(a)}$ (d'après $h \gg 1$) mais aussi que P va dépendre de la phase φ relative de $\mathbf{H}_{(a)}$ et $\mathbf{H}'_{(a)}$ en $r = R$.

Or cette dernière est aléatoire vu que $\mathbf{H}$ (champ ondulé) est dû à des phénomènes secondaires et indéterminés.

Cependant il peut se produire l'auto-amplification. Un état de champ très faiblement ondulé, dans une certaine position, à un instant donné, à une température assez élevée, peut provoquer une augmentation de sa propre ondulation et cela pour deux raisons que nous allons voir aux paragraphes suivants, et qui varient dans le même sens [12] :

— effet de la répartition d'énergie § IV A et E ;

— conservation du pas des ondulations à une certaine profondeur § IV B,6.

Mais alors nous ne pourrons plus maintenir μ indépendent de z, ni par suite div $\mathcal{H} = 0$.

IV. **Cas de la perméabilité variable suivant oz** (div $\mathcal{H} \neq 0$). — Dans ce qui précède, c'est l'hypothèse $H \ll H'$ qui conduit à la simplification consistant à considérer que la perméabilité est constante le long d'une génératrice dans une virole donnée. Mais alors nous en tirons les champs et énergies variables en z ; or p varie avec T et μ avec $\mathcal{H}$ et T. Cette dernière variation est surtout sensible lorsque l'on approche d'une température critique T_c qui correspond à une transformation, soit le point AC, de l'acier, soit le point de Curie du fer pur.

Il y a une baisse rapide de perméabilité en fonction du supplément d'énergie fournie/sec.

L'approximation ci-dessus : $\dfrac{\partial(\mu, \rho)}{\partial z} = 0$ comporterait alors une contradiction précisément dans la zone $T > T_c$ où tout se déclenche, à cause de la forme (22) de W donc de T [9], [10], [12].

A) Champs. — Il va alors se produire des phénomènes trop compliqués pour être traités par le calcul. On pourrait cependant tracer par approximations graphiques une carte des champs, où l'on verrait l'énergie W devenir beaucoup plus forte précisément dans les régions de plus faible μ (sauf s'il s'agit d'un cylindre très mince), abstraction faite des transmissions thermiques. C'est d'ailleurs ce que vérifie l'expérience [12].

Nous allons donner ci-dessous une explication mathématique exempte de contradiction, au moins an déclenchement, en posant, dans une virole ; (cf. B,5) :

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 e^{ilz}, \text{ (4)} \qquad \mathrm{div}\, \mathcal{B} = 0 \qquad (23)$$

(cf. § II) $\mathrm{div}\, \mathcal{H} = -\dfrac{1}{\mu}\left[\mathcal{H}_z \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\partial r}\right] \neq 0$, négligeant $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}$ dans les viroles ; ρ variant relativement peu avec T, nous le laisserons constant en z.

On va chercher des solutions de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}z &= H_0(r)\,(1 + p\, e^{ilz} + ps\, e^{2ilz} + \dots)\, e^{i\omega t} \\ \mathcal{H}r &= H_2(r)\, e^{ilz}(1 + q\, e^{ilz} + \dots)\, e^{i\omega t} \end{aligned} \qquad (24)$$

$$s, p, q, \frac{\mu_1}{\mu_0} \ll 1.$$

Le pas $\lambda = 2\pi/l$ des ondulations reste indépendant de r. Le champ résultant

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_z + \mathcal{H}_r \# \mathcal{H}_z \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{H}_r}{\mathcal{H}_z}\right]^2,$$

(4) Cf. § II B) 1°) renvoi (3).

car on verra que $H_2 \ll H_0$. Si donc on connaît le champ axial dans l'entrefer on peut commencer le calcul indiqué au § III, D le champ résultant dans la première virole en étant peu différent et la perméabilité sera égale à la moyenne μ_0 le long de oz.

Les équations (5) vont donner deux groupes :

le groupe (r) $\mathcal{H}r : \frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{div}\,\mathcal{H}) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\delta \mathcal{H}z}{\partial r}$.

le groupe (z) $\mathcal{H}z : \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{div}\,\mathcal{H}) = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{e}\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2 \mathcal{H}z - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{H}z}{\partial z} + \mathcal{H}z\frac{\partial \mu}{\partial z^2}\right)$

d'après (23).

Mais la petitesse de $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ nous conduit à négliger $\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2$. On écrit les équations (5), $\left(\text{avec } \gamma^2 = \frac{\alpha^2}{\mu_0}\right)$:

$$\begin{cases} (r) & -\Delta c\,\mathcal{H}r + \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{div}\,\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}r}{r^2} = -i\gamma^2\mu\,\mathcal{H}r \\ (z) & -\Delta\,\mathcal{H}z + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\,\mathcal{H} = -i\gamma^2\mu\,\mathcal{H}z \end{cases} \qquad (25)$$

Il suffira de considérer la forme en $\mathrm{e}^{+i\omega t}$, car il ne s'agit ici que d'obtenir les ordres de grandeur des H_0, H_2, p, q, s, l, μ_1. On n'aura pas besoin de transformer en valeurs réelles pour les conditions de passage.

1° *Équations (r) radiales.* — (25 r) s'écrit, en tenant compte de $\mu = \mu_0 + \mu_1\,\mathrm{e}^{ilz}$ et des formes (24) :

$$H[\mu_0 + \mu_1\,\mathrm{e}^{ilz}]\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - l^2\right) - q\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - 4l^2\right) + \frac{1}{r^2}(1 + q\,\mathrm{e}^{ilz})\right] H_2$$
$$- il(1 + p\,\mathrm{e}^{ilz} + ps\,\mathrm{e}^{2ilz})\,\mu_2\frac{\partial H_0}{\partial r} = -i\gamma^2(1 + q\,\mathrm{e}^{ilz})\,(\mu^2{}_0 + 2\mu_0\mu_1\,\mathrm{e}^{ilz})\,H_2. \qquad (26\,r)$$

Comme nous faisons des calculs de perturbation, nous négligeons les termes petits ; c'est-à-dire les harmoniques en e^{nilz} non écrits dans (24) ($n > 2$).

Il faut donc séparer par ordres de grandeurs, suivant n

$$-q\mu_1\,\mathrm{e}^{2ilz} \times \left[\Delta|H_2 - il\,sp/q\frac{\partial H_0}{dr} + \frac{H_2}{r^2} = (2i\gamma^2\mu_0 + 4l_1^2)H_2\right] \qquad (26\,r_2)$$

$$\mathrm{e}^{ilz}\left[-\Delta(\mu_1 + q\mu_0)H_2 - i\mu_1 pl\frac{\partial H_0}{\partial r} + \frac{H_2}{r^2}(q\mu_0 + \mu_1) = -H_2[(\mu_1 + 4q\mu_0)\,l^2 + i\alpha^2(2\mu_1 + 4q\mu_0)]\right] \qquad (26\,r_1)$$

$$\left(-\Delta + \frac{1}{r^2}\right)H_2 - il\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{\partial H_0}{\partial r} = -(l^2 + i\alpha^2)\,H_2\,; \qquad (26\,r_0)$$

les deux dernières donnant :

$$+\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} + q - p\right)\left[\Delta - \frac{1}{r^2}\right]H_2 = \left[l^2\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} + 4q\right) + i\alpha^2\left(\frac{2\mu_1}{\mu_0} + q\right) + (l^2 + i\alpha^2)\,p\right]H_2.$$

Ce qui veut dire que H_2 est une fonction de Bessel d'argument

$$U_2\,r = r\sqrt{\frac{-l^2\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} + 4q - p\right) - i\alpha^2\left(\frac{2\mu_1}{\mu_0} + q - p\right)}{\mu_1/\mu_0 + q - p}}. \qquad (27)$$

2° *Équations (z) axiales.* — (25 z) s'écrit dans les mêmes conditions :

$$\left[-\left(\frac{\delta^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)H_0 - \left(\frac{\delta^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - l^2\right)p\,H_0\,\mathrm{e}^{ilz} - \left(\frac{\delta^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - 4l^2\right)ps\,H_0\,\mathrm{e}^{2ilz}\right](\mu_0 + \mu_1\,\mathrm{e}^{ilz})$$
$$- H_0\,il\,\mathrm{e}^{ilz}\mu_1(ipl\,\mathrm{e}^{ilz} + 2ipsl\,\mathrm{e}^{2ilz}) + H_0\,l^2\,\mathrm{e}^{ilz}\,\mu_1(1 + p\,\mathrm{e}^{ilz} + ps\,\mathrm{e}^{2ilz}) =$$
$$-1\,\gamma^2(\mu_0 + \mu_1{}^{ilz})^2\,H_0(1 + p\,\mathrm{e}^{ilz} + ps\,\mathrm{e}^{2ilz}). \qquad (28)$$

D'où l'on tire

$$ps\mu_1\mathrm{e}^{3ilz}\left[-(s - 4l^2)\,H_0 + 3l^2\,H_0 = -i\gamma^2\,H_0\left(\frac{\mu_1}{s} + 2\mu_0\right)\right] \qquad (28\,z_3)$$

$$p\,\mu_1\,\mathrm{e}^{2ilz}\left(-(\Delta - l^2)\,H_0 - (\Delta - 4l^2)\frac{s}{\mu_1}\mu_0\,H_0 + 2l^2\,H_0 = -i\gamma^2\,H_0\left(\mu_0\frac{s}{\mu_1} + 2\right)\right) \qquad (28\,z_2)$$

$$-\mu_1\,\mathrm{e}^{ilz}\left(\Delta H_0 + (\Delta - l^2)\frac{p}{\mu_1}\mu_0\,H_0 + l^2\,H_0 = i\gamma^2\,\mu_0\,H_0(\mu_0\,p/\mu_1 + 2)\right) \qquad (28\,z_1)$$

$$\Delta H_0 = i\alpha^2\,H_0, \qquad (28\,z_0)$$

Équation classique des champs non ondulés.

3° *Arguments des fonctions H(r).* — Donc H_0 est fonction de Bessel d'argument

$$U_0\,r = r\sqrt{-i\alpha^2}.$$

Mais (28 z_2) s'écrit

$$\Delta H_0\left(1 + \frac{s}{\mu_1}\mu_0\right) = H_0\left[-i\alpha^2\left(\mu_0\frac{s}{\mu_1} + 2 - 3l^2 - 4l^2\frac{s\,\mu_0}{\mu_1}\right)\right]$$

montrant que U_0 est encore égal à :

$$U_0 = \sqrt{\frac{-i\alpha^2(s\,\mu_0 + 2\mu_1) - 3l^2 - 4l^2\,s\,\mu_0}{\mu_1 + s\,\mu_0}}$$

tandis que (28 z_1) montre que l'on a encore

$$U_0 = \sqrt{\frac{-i\alpha^2(p\,\mu_0 + 2\mu_1) - l^2\,\mu_1 - l^2\,p\,\mu_0}{\mu_1 + p\,\mu_0}}$$

Mais les équations (26 r_1, 26 r_0) montrent qu'alors $U_2 = U_0$.

Il s'ensuit que

$$-i\alpha^2 = -(l^2 + i\alpha^2(- \frac{3q\,\mu_0\,l^2 + i\mu_1\,\alpha^2}{\mu_1 + (q - p)\,\mu_0}$$

$$= -(l^2 + i\alpha^2) - \frac{i\alpha^2\,\mu_1 + 2l^2\,\mu_1 + 3l^2\,\mu_0}{\mu_1 + s\,\mu_0}$$

$$= -(l^2 + i\alpha^2) - \frac{i\mu_1\,\alpha^2}{\mu_1 + p\,\mu_0}$$

On tire de ces trois équations :

$$-l^2 = \frac{i\mu_1\,\alpha^2}{\mu_1 + p\,\mu_0}, \quad \mu_1 = q\,\mu_0, \quad 2\mu_1 = \mu_0(p + 4s) \qquad (29)$$

soit $$q = p/2 + 2s.$$

De plus comme H_0 est une fonction linéaire de $J_0(U_0)$, $Y_0(U_0)$ et H_2 est une fonction de $J_1(U_0)$, $Y_1(U_0)$ ([5]), on a dans les équations (26) :

$$\frac{\partial H_0}{\partial r} = -U_0 A \times H_2(U_0 r) = -\sqrt{-i\alpha^2}\,AH_2.$$

Or l'expression de H_2 résulte de ($26\,r_0$) et ($26\,r_1$). Il suffit donc de n'utiliser maintenant que $26\,r_0$, par exemple, qui s'écrit :

$$\left(-\Delta + \frac{1}{r^2}\right) H_2$$

$$= H_2\left(-l^2 - i\alpha^2 + il\frac{\mu_1}{\mu^0}\sqrt{-i\alpha^2}\,A\right) = H_2(U'r) \qquad (26\ r')$$

d'où l'on tire, en annulant $U' - U_0$:

$$A - \frac{i\mu_0}{\sqrt{\mu_1(\mu_1 + p\,\mu_0)}}. \qquad (30)$$

4° *Grandeurs relatives des quantités* $\frac{p,\ q,\ s,\ \mu_1,\ l}{\mu_0}$. — Admettons *a priori* que l'on ait

$$|q| \sim |p^2|, \qquad |p + 4s| \sim |p^2| \sim |\mu_2|. \qquad (31)$$

mais $$|p| \sim |s| \ll 1.$$

D'après (29) on en déduit que

$$\mu_1/\mu_0 = \mathcal{O}(p^2)$$

De (30 on déduit que

$$H_2/H_0\ \#\ \frac{\mathcal{H}r}{\mathcal{H}z} = \mathcal{O}(p^{3/2}) \qquad (30')$$

comme de (29) on déduit également $|l^2/\alpha^2| = \mathcal{O}(p)$ on vérifie que l'on a de toutes façons $Hr/Hz \ll 1$, comme au § III.

Avoir pris précédemment div $\mathcal{H} = 0$ n'est pas absurde puisque l'on a d'après (23)

$$\text{div}\ \mathcal{H} = \text{div}\ H = \mathcal{O}(p^3) \quad (\text{div}\ H' = 0\ !) \qquad (23')$$

On va maintenant justifier les négligences des équations ($26\,r_2$) et ($28\,z_3$).

Équation n°	Terme le plus grand	Terme le plus petit	
($26\ \ r_2$)	$p^3\,\alpha^2\,H_2$	$p^5\,\alpha^2\,H_2$	
($28\ \ z_3$)	$p^{5/2}\,\alpha^2\,H_2$	$p^{7/2}\,\alpha^2\,H_2$	
($26\ \ r_1$)	$p^2\,\mu_0 H_2$	$p^3\,\alpha^2\,H_2$	(α^2 et μ_0 sont pris pour unité ;
($26\ \ r_0$)	$p^0\,H_2\,\alpha^2$	$p^2\,\alpha^2\,H_2$	en réalité ils valent environ 100)
($28\ \ z_2$)	$p^{1/2}\,\mu_0\,H_2$	$p^{3/2}\,\alpha^2\,H_2$	
($28\ \ z_1$)	$p^{-1/2}\,\mu_0\,H_2$	$p^{1/2}\,\alpha^2\,H_2$.	

Si l'on compare les ordres de grandeur, on retrouve justifiées les négligences faites vu que $p \ll 1$. Cf. (29).

B) Confirmations et conséquences des hypothèses faites. — a) *Justification.* — Comme les ondulations μ naissent après un certain temps où ont régné, soit les champs classiques ($l = 0$) soit ceux du § III (div $\mathcal{H} = 0$) il est naturel de chercher à voir si le raccordement entre ces divers états d'induction magnétique est possible.

1° Argument des fonctions : on a ici

$$U = \sqrt{-i\alpha^2} \text{ au lieu de } k = \sqrt{-i\alpha^2 - l^2}\,;$$

mais la faiblesse de l^2/α^2 montre que

$$U\ \#\ k, \text{ soit } |U| = |k|\,[1 + \mathcal{O}(p^2)].$$

2° Perméabilité $\mu_1 = \mu_0\,p^2$; la transition entre les deux états de perméabilité est donc très progressive :

3° Rapport des champs ondulés radiaux aux champs ondulés axiaux : on a trouvé au § III

$$(Hr/Hz)^{(f)} = |l/\sqrt{-i\alpha^2\,l^2}|\ \#\ |l/\alpha|.$$

On a ici

$$Hr/Hz^{(f)} = (1/p)\,A = \mathcal{O}(p^{1/2})\ \#\ (l/\alpha). \quad (\text{cf. } (10)) \qquad (30')$$

4° Enfin on a vu que

$$\text{div}\ \mathcal{H} = \mathcal{O}(p^3).$$

Toutes ces conditions impliquent les hypo-

([5]) Remarquer la faiblesse des termes en $2lz$; de plus $\mathcal{H}z$ a même module H_0 que $H'z$. Les coefficients des Y et J sont dans des rapports voisins en $\mathcal{H}z$ ou en $\mathcal{H}r$.

thèses (31) et par conséquent la faiblesse du rapport $e/\lambda = |l/\alpha|$, ainsi que des approximations utilisées ci-dessus, et par suite celle du § III ($\mu(\mathcal{H})$ = indépendant de z).

Donc la nécessité d'avoir une transition entre le champ classique uniforme et le champ ondulé à perméabilité uniforme puis ensuite avec perméabilité ondulée implique la petitesse du rapport l/α donc du rapport e/λ ; le pas des zébrures (à leur déclenchement) est nécessairement beaucoup plus grand que l'épaisseur de peau.

b) *Détermination du pas λ des zones.* — Il resterait à trouver la raison pour laquelle ce rapport est non seulement petit, mais constant, ou du moins pourquoi le pas λ est statistiquement constant pour l'acier à fréquence f fixe constante. Or on peut écrire la 1[re] équation (29) :

$$|l^2| = \frac{\mu_1}{p}\frac{\alpha^2}{\mu_0} = L\frac{f}{\rho}\frac{\mu_1}{p}$$

où L est une constante absolue et on a négligé $\mu_1/\mu_0 = \mathcal{O}(p^2)$ devant p. Écrivons $\mu_1 = Gp$ avec $\mu_1 = \mu_0\, p^2$ (29).

On en déduit

$$p = G/\mu_0 \quad \text{et} \quad \mu_1\,\mu_0 = G^2. \qquad (32)$$

Considérons maintenant les deux premières viroles $j = 1$ et $j = 2$ de notre cylindre. Chacune a une perméabilité (μ', μ'') indépendante de r mais $\mu' \neq \mu''$. Il faut assurer les conditions de passage des champs de l'une à l'autre ($T < T_c$, μ', $\mu'' \gg 1$).

Le calcul serait extrêmement compliqué ; il faudrait introduire $\frac{d\mu}{dr} = \gamma(\mathcal{H})$ que nous avons négligé et ensuite donner à (24) le développement complet ; puis ne plus se contenter des approximations faites en A), tenir compte des parties réelles, etc...

Mais ce qui est toujours certain, c'est que si l'on considère les harmoniques en Cos lz, la condition de conservation du champ radial doit être réalisée pour Sin $lz = 0$. Donc le pas λ est nécessairement constant. Or nous sommes au début du phénomène, à température assez basse : la résistivité est pratiquement constante dans le cylindre, la perméabilité étant, elle, variable avec le champ : or $\mathcal{H}'' < \mathcal{H}'$.

On a donc les relations

$$|l'^2| = |l''^2| \quad \text{soit} \quad |\alpha'^2\, p'| = |\alpha''^2\, p''|.$$

ou bien :

$$f\mu'\, p'/\rho' = f\mu''\, p''/\rho''.$$

Mais étant donné les hypothèses, on peut écrire cela

$$\mu p = F(\rho)$$

où F est une fonction très peu variable avec ρ et indépendante de μ. Cela reste donc vrai en posant d'un acier à un autre et on a finalement :

$$|l^2| = L'\frac{\mu}{\mu_0}\frac{f}{\rho}\frac{\mu_1}{p} \quad \text{avec} \quad (32)\ \frac{\mu_1}{p} = G = \mu p = F(\rho), \quad \mu \# \mu_0.$$

D'où le résultat donné par l'expérience :

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{l} = K(\rho)\sqrt{\rho/f}} \quad K(\rho) \text{ à peu près constant} \qquad (33)$$

(32) montre de plus que la baisse générale de $\mu \# \mu_0$ à $T > T_c$ entraîne, sans passer par l'énergie, une augmentation de l'ondulation μ_1 (cf. fin du § III).

Remarques. — Il est curieux de constater que si l'on écrit (24) :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \begin{cases} \mathcal{H}_0 \text{ comprend les termes constantes, ou en } lz \\ \mathcal{H}_1 \text{ comprend les termes en } 2lz \end{cases}$$

et si l'on fait $|\mathcal{B}| = |\mu_0 + \mu_1|\ |\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1|$, constatant d'après (31) que $\mathcal{H}_1 \# q\,\mathcal{H}_0$ on démontre très rapidement le 2[e] résultat (29)

$$1 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \# \frac{\mathcal{B}}{\mu_0\,\mathcal{H}_0}(1 - q).$$

Or on a sensiblement $\mathcal{B} = \mu_0\,\mathcal{H}_0$ vu la faible amplitude de l'ondulation. D'où

$$|\mu_1/\mu_0| = q = p^2,$$

D'ailleurs si l'on avait $q \gg p^2$, on tirerait de (29)

$$|l^2| > \left|\frac{\alpha^2}{2}\right| \text{ ce qui est faux.}$$

C) Ondulation de l'énergie. — Maintenant nous pouvons écrire (24) sous la forme

$$\mathcal{H}z = H_0(r)\,[\text{Cos}\ \omega t + p\ \text{Cos}\ lz\ \text{Cos}\ (\omega t + \varphi) + \frac{p^2}{4}\text{Cos}\ 2lz\ \text{Cos}\ (\omega t + \varphi) + \ldots) \qquad (34)$$

$$\mathcal{H}r = \mathcal{O}(p^{3/2})\,H_0(r)\,[\text{Sin}\ lz\ \text{Cos}\ (\omega t + \varphi) + p^2\ \text{Sin}\ 2lz\ \text{Cos}\ (\omega t + \varphi) + \ldots)$$

ce qui d'après (22) va donner :

$$W = MH^2_{(a)}(R) + Np^2\,H^2_{(a)}(R)\cos 2lz + P.pH^2_{(a)}(R)\cos lz + \ldots + Qp^2\,H^2_{(a)}(R) + \mathcal{O}(p^3) \qquad (35)$$

où le terme ondulé principal est le coefficient de P, le signe de cette dernière constante dépendant de la phase φ, elle-même aléatoire au début du phénomène.

Si une opposition des phases en z, ($\varphi(p)$ pour W, $\varphi(q)$ pour μ_1, (35), (29) et (31)) règne un instant, la condition physique $\frac{\partial\mu}{\partial T} \ll 0$ peut alors amener l'autoamplification (fin du § III, début du § IV). Ce qui fixe le phénomène.

V. **Conclusion.** — Nous pouvons maintenant décrire le mécanisme de déclenchement des zébrure et leur répartition :

1° A basse température, même si la perméabilité est constante en z, des harmoniques en Cos lz (ou Sin lz) des champs sont possibles, mais faibles. Mais alors W va être ondulé en z et par suite μ (W et μ varient en sens inverse).

2° Une très faible ondulation μ_1 de μ prend naissance et implique alors toute une série d'harmoniques en Cos nlz d'amplitude négligeable.

3° Ces phénomènes se raccordent entre eux, et doivent toujours exister, mais dans un état de désordre ; leur pas $\lambda = \frac{2\pi}{l}$ est grand devant « l'épaisseur de peau » e.

4° La température étant rapidement croissante, on arrive dans une zone où $d\mu/dT$ est grand et négatif. Si, alors pendant un instant, le W de (35) se fixe en z en opposition de phase avec $\mu_1(z)$, il y a auto-amplification.

On passe brusquement du désordre à l'ordre : Lorsque μ_1 n'est plus très petit devant μ_0, on peut substituer au calcul une étude qualitative montrant la persistance de cette auto-amplification.

5° Le pas λ, légèrement irrégulier par son origine dans le désordre, doit tout de même se conserver sur une certaine profondeur. Le calcul en déduit que la baisse générale de perméabilité accroît aussi son ondulation et en tire la valeur de λ.

Finalement :

— la préexistence même de cette ondulation des champs, donc de l'énergie qui tend à l'accroître par l'intermédiaire de la perméabilité ;

— la baisse de perméabilité à l'approche de la température critique qui la favorise ;

— la condition $\frac{\Delta\mu}{\Delta T} \ll 0$ qui apparait alors ;

ordonnent et amplifient un état d'ondulation de l'énergie (pour autant que la diffusion thermique est négligeable) avec le pas

$$\alpha = K\ (\rho) \sqrt{\rho/f}$$

où K est une constante en première approximation, ce que montre l'expérience [1], [2], [10], [12].

Cela n'est pas possible dans deux cas :

— faible perméabilité intiale. On aurait d'après

$$\mu_1\, \mu_0 = C^{te}.$$

une valeur trop forte de μ_1/α, rendant impossible les transitions (1°, 2°, 3°).

— Cylindre réduit à un tube mince, car une étude qualitative montre que la baissé de μ dans certaines zones renverserait l'amplification.

Manuscrit reçu le 8 octobre 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Néel, Exposé non publié sur l'interprétation des zébrures dans le chauffage H. F. (U. T. A. C.).
[2] Babat, *J. Appl. Phys.*, 1944, **15**.
[3] *Acta Polytechnica*, 1952, 101.
[4] *Ann. Physik*, IV, folge 2 (O. Strutt).
[5] Ribaud, *J. Physique Rad.*, 1925, **65**, 295.
[6] Lamb, *Math. Soc. Proc.*, London, 1884, **15**, S 138.
[7] Sommerfeld (A.), *Ann. Physik*, 1904, **15**, 677.
[8] Whittaker, Cours of modern analysis, t. II.
[9] Tables de constantes physiques. International physical Tables. Vol III.
[10] *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **22**. Note de Pomey, George et Abel.
[11] Pomey (J. B.), Introduction à l'étude des courants téléphoniques.
[12] U. T. A. C. — Études et recherches, février 1957.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 12
TOME 18, DÉCEMBRE 1957, PAGE 154 A.

LES PRISES MAXIMUM TOLÉRABLES (M. P. I.) EN MILLIGRAMMES ET EN MICROCURIES POUR LES RADIONUCLIDES DANGEREUX DANS L'INDUSTRIE NUCLÉAIRE ET POUR UNE EXPOSITION UNIQUE

Par M. Pierre-Octave ROBERT,
Professeur agrégé de physique.

Les tableaux qui suivent fournissent le classement des radionuclides dangereux dans l'industrie nucléaire par prises maximum tolérables croissantes en milligrammes, et donnent *les correspondances des M. P. I. en milligrammes et des M. P. I. en microcuries.* Ceci est utile, si l'on veut établir une *corrélation indispensable entre la détection*, qui fait appel inévitablement à des méthodes radioactives, et où l'évaluation se fait en microcuries, *et l'absorption des poussières correspondantes par l'organisme et leur arrêt* (*par filtrage*), qui sont basées sur un effet de masse ou de volume.

Nous avons donc déterminé les *prises maximum tolérables en milligrammes et en microcuries, correspondant aux taux de doses adoptés par la Commission Internationale de Protection Radiologique* (International Commission on Radiological Protection) (I. C. R. P.), ceci pour une exposition de 8 heures dans le cas de l'inhalation, instantanée dans le cas de l'injection.

1° *Taux de dose annuels :*

a) *Taux de dose de* 15,7 *rem par an* (ancien taux).

b) *Taux de dose de* 5 *rem par an* (nouveau taux plus prudent, récemment admis) [1].

2° *Taux de dose habdomadaire de* 0,3 *rem par semaine* (resté inchangé pour le moment) [1].

3° *Taux de dose pour la durée d'une vie.*

Nous avons adopté le taux de 150 *rem en* 70 *ans*, que le Dr K. Z. Morgan, W. S. Snyder et M. R. Ford considèrent comme ne devant pas être dépassé [2].

Le taux de dose pour la durée d'une vie et le taux de dose annuel sont plus fertiles en enseignements.

Nous aurions pu faire ces déterminations pour les quelques 81 radionuclides les plus courants ; nous avons cru devoir alléger les tableaux en ne portant ici que les radio-isotopes les plus dangereux et les plus fréquents dans l'industrie nucléaire.

Nous avons donné les valeurs des prises maximum tolérables (M. P. I.) dans les cinq cas classiques qui avaient fait l'objet des études du Dr K. Z. Morgan, à savoir :

Cas I : Inhalation d'une matière radioactive soluble (organe critique autre que le poumon et le tractus gastro-intestinal).

Cas II : Blessure par piqûre d'une substanc radioactive soluble.

Cas III : Blessure par piqûre d'une substanc radioactive insoluble.

Cas V : Inhalation d'une substance radioactiv insoluble (poumon organe critique).

Cas V : Inhalation d'une substance radioactiv insoluble (tractus gastro-intestinal organe cr tique).

Nous tenons à bien préciser que l'*inhalation aur duré* 8 *heures et que l'injection aura été instantané* mais que nos déterminations ont été faites pou les doses ci-dessus spécifiées, ce qui veut dire qu *l'action destructrice de la particule radioactive env sagée sera, selon le cas, de* 70 *ans, un an, ou un semaine.*

Nos méthodes de calcul sont inspirées de celle du Dr K. Z. Morgan [2].

L'originalité de notre travail réside dans la déter mination des M. P. I. en milligrammes corres pondant aux taux de doses de 150 rem en 70 ans 15,7 rem par an, 5 rem par an. Nous avons égale ment déterminé les valeurs des M. P. I. en micro curies pour le nouveau taux de dose de 5 rem par an

Remarque très importante (ajoutée à la correc tion). — De tous nouveaux documents (« Recen changes in maximum permissible exposure values présentés par le Dr K. Z. Morgan, Director Healt Physics Division, Oak Ridge National Laborator le 12 mars 1957 au « Congrès Nucléaire de Phila delphie » et « Status of Internal Dose Problem présenté par le Dr K. Z. Morgan au « Healt Physics Society Annual Meeting, Pittsburg, Pensy vania) ont encore fait évoluer ce problème.

Dans le premier de ces documents il est dit « Dans le voisinage d'une usine les exposition admissibles doivent être limitées au dixième de expositions professionneles. *La dose des gonade doit être d'environ* 4 *rem à l'âge de* 30 *ans.* » Il es facile d'en déduire qu'elle sera de 20 rem à 70 ans Dans ces conditions *tous les résultats relatifs à l durée d'une vie* (70 *ans*) *doivent être divisés, pou les gonades, organes critiques, par* 7,5.

Manuscrit reçu le 21 octobre 1957.

Classement par prise maximum tolérable (M. P. I.) en milligrammes croissante
pour substances dangereuses dans l'industrie nucléaire
dans le cas de l'inhalation d'une substance radioactive soluble (Cas I).
(Organe critique autre que le poumon et le tractus gastro-intestinal).

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
^{131}I	$1,4 \times 10^{-6}$	$1,7 \times 10^{2}$	$1,4 \times 10^{-7}$	17	$4,9 \times 10^{-8}$	5,4	$5,7 \times 10^{-9}$	0,70	Thyroïde
^{242}Cm	$1,7 \times 10^{-6}$	5,7	2×10^{-7}	0,67	$6,4 \times 10^{-8}$	0,21	$8,7 \times 10^{-8}$	0,29	Os
^{89}Sr	$1,6 \times 10^{-6}$	$4,3 \times 10^{2}$	$1,7 \times 10^{-6}$	47	$5,4 \times 10^{-7}$	15	$3,7 \times 10^{-7}$	10	Os
^{140}Ba + ^{140}La	2×10^{-5}	$1,4 \times 10^{3}$	$2,1 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{2}$	$6,7 \times 10^{-7}$	48	$1,2 \times 10^{-7}$	8,7	Os
^{90}Sr + ^{90}Y	$2,5 \times 10^{-6}$	5	$2,8 \times 10^{-5}$	5,7	$8,9 \times 10^{-7}$	1,8	$2,5 \times 10^{-5}$	5,3	Os
^{91}Y	$2,8 \times 10^{-5}$	$7,0 \times 10^{2}$	$2,9 \times 10^{-6}$	73	$9,2 \times 10^{-7}$	23	$6,3 \times 10^{-7}$	16	Os
^{144}Ce + ^{144}Pr	$3,8 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{2}$	$5,4 \times 10^{-6}$	17	$1,7 \times 10^{-6}$	5,4	$3,0 \times 10^{-6}$	9,3	Os
^{140}La	$5,9 \times 10^{-5}$	$3,3 \times 10^{4}$	$5,9 \times 10^{-6}$	$3,3 \times 10^{3}$	$1,9 \times 10^{-6}$	$1,05 \times 10^{3}$	$1,2 \times 10^{-7}$	70	Os
^{105}Rh	8×10^{-5}	$6,7 \times 10^{4}$	$8,4 \times 10^{-6}$	$7,0 \times 10^{3}$	$2,7 \times 10^{-4}$	$2,2 \times 10^{3}$	$1,7 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{2}$	Reins
^{129}Te	$1,1 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{3}$	$1,2 \times 10^{-5}$	$3,7 \times 10^{2}$	$3,9 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{2}$	$6,0 \times 10^{-7}$	18	Reins
^{143}Pr	$1,9 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^{4}$	$2,1 \times 10^{-5}$	$1,4 \times 10^{3}$	$6,7 \times 10^{-6}$	$4,5 \times 10^{2}$	$1,1 \times 10^{-6}$	73	Os
^{95}Zr + ^{95}Nb	$2,5 \times 10^{-4}$	$5,3 \times 10^{3}$	$2,5 \times 10^{-5}$	$5,3 \times 10^{2}$	8×10^{-6}	$1,7 \times 10^{2}$	$5,0 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{2}$	Os
^{241}Am	3×10^{-4}	0,90	$1,2 \times 10^{-4}$	0,37	4×10^{-6}	0,12	$1,1 \times 10^{-4}$	0,33	Os
^{239}Pu	$3,2 \times 10^{-4}$	$2,0 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-3}$	0,12	$6,1 \times 10^{-6}$	$3,8 \times 10^{-2}$	$3,2 \times 10^{-4}$	0,13	Os
^{86}Rb	$4,2 \times 10^{-4}$	$3,2 \times 10^{4}$	$4,3 \times 10^{-5}$	$3,3 \times 10^{3}$	$1,4 \times 10^{-5}$	$1,05 \times 10^{3}$	$1,8 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{2}$	Muscle
^{96}Tc	$6,2 \times 10^{-4}$	$2,0 \times 10^{5}$	$6,7 \times 10^{-5}$	$2,1 \times 10^{4}$	$2,1 \times 10^{-5}$	$6,7 \times 10^{3}$	$1,4 \times 10^{-6}$	$4,7 \times 10^{2}$	Reins
^{106}Ru + ^{106}Rh	$6,7 \times 10^{-4}$	$2,3 \times 10^{3}$	7×10^{-3}	$2,4 \times 10^{2}$	$2,2 \times 10^{-5}$	76	$6,0 \times 10^{-6}$	20	Reins
^{154}Eu	$8,2 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{2}$	$4,1 \times 10^{-4}$	60	$1,3 \times 10^{-4}$	19	$4,0 \times 10^{-4}$	57	Os
^{127}Te	$9,2 \times 10^{-4}$	$8,3 \times 10^{3}$	$9,6 \times 10^{-5}$	$8,7 \times 10^{2}$	$3,1 \times 10^{-5}$	$2,8 \times 10^{2}$	$6,0 \times 10^{-6}$	53	Reins
^{147}Pm	$5,8 \times 10^{-3}$	$5,3 \times 10^{3}$	$6,3 \times 10^{-4}$	$5,7 \times 10^{2}$	2×10^{-4}	$1,8 \times 10^{2}$	$2,1 \times 10^{-4}$	$2,0 \times 10^{2}$	Os
^{151}Sm	$1,0 \times 10^{-2}$	$2,4 \times 10^{2}$	5×10^{-2}	$1,2 \times 10^{3}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$3,8 \times 10^{2}$	10^{-2}	$1,1 \times 10^{3}$	Os
^{99}Mo	$8,8 \times 10^{-2}$	$4,0 \times 10^{7}$	$8,8 \times 10^{-3}$	$4,0 \times 10^{6}$	$2,8 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{6}$	$2,0 \times 10^{-4}$	$9,3 \times 10^{4}$	Os
^{137}Cs + ^{137}Ba	0,22	$1,7 \times 10^{4}$	$2,3 \times 10^{-2}$	$1,8 \times 10^{3}$	$7,5 \times 10^{-3}$	$5,7 \times 10^{2}$	$1,8 \times 10^{-3}$	$1,4 \times 10^{2}$	Muscle
^{233}U	0,41	3,7	$7,7 \times 10^{-2}$	0,70	$2,4 \times 10^{-2}$	$2,2 \times 10^{-1}$	$4,7 \times 10^{-2}$	0,43	Os
^{238}U	$8,1 \times 10^{3}$	2,7	$8,4 \times 10^{2}$	0,28	$2,7 \times 10^{2}$	$8,9 \times 10^{-2}$	$1,1 \times 10^{2}$	$3,7 \times 10^{-2}$	Reins

I. — Radionuclides.
II. — M. P. I. en mg pour une dose de 150 rem en 70 ans.
III. — M. P. I. en µC pour une dose de 150 rem en 70 ans.
IV. — M. P. I. en mg pour une dose de 15,7 rem en un an.
V. — M. P. I. en µC pour une dose de 15,7 rem en un an.
VI. — M. P. I. en mg pour une dose de 5 rem en un an.
VII. — M. P. I. en µC pour une dose de 5 rem en un an.
VIII. — M. P. I. en mg pour une dose de 0,3 rem par semaine.
IX. — M. P. I. en µC pour une dose de 0,3 rem par semaine.
X. — Organe critique.

Classement par (M. P. I.) en milligrammes croissante
pour substances dangereuses dans l'industrie nucléaire
dans le cas d'une blessure par piqure et d'une substance radioactive soluble (Cas II)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
^{242}Cm	$4,2 \times 10^{-8}$	0,14	$5,1 \times 10^{-8}$	0,17	$1,6 \times 10^{-8}$	$5,4 \times 10^{-2}$	$2,3 \times 10^{-8}$	$7,6 \times 10^{-2}$
^{131}I	$9,6 \times 10^{-7}$	$1,2 \times 10^{2}$	$1,1 \times 10^{-7}$	13	$3,5 \times 10^{-9}$	4,1	$4,1 \times 10^{-9}$	0,52
^{140}Ba + ^{140}La	$5,5 \times 10^{-6}$	$3,9 \times 10^{2}$	$5,7 \times 10^{-7}$	41	$1,8 \times 10^{-7}$	13,2	$3,3 \times 10^{-8}$	2,4
^{91}Y	$7,2 \times 10^{-6}$	$1,8 \times 10^{2}$	$7,6 \times 10^{-7}$	19	$2,4 \times 10^{-7}$	6,1	$1,6 \times 10^{-7}$	4,0
^{89}Sr	$8,6 \times 10^{-6}$	$2,4 \times 10^{2}$	$9,4 \times 10^{-7}$	26	3×10^{-7}	8,3	$2,0 \times 10^{-7}$	5,5
^{144}Ce + ^{144}Pr	$9,9 \times 10^{-6}$	31	$1,4 \times 10^{-6}$	4,3	$4,5 \times 10^{-7}$	1,4	$7,3 \times 10^{-7}$	2,3
^{90}Sr + ^{90}Y	$1,35 \times 10^{-5}$	2,7	$1,5 \times 10^{-5}$	3,0	$4,8 \times 10^{-6}$	0,95	$1,3 \times 10^{-5}$	2,9
^{140}La	$1,4 \times 10^{-5}$	$7,6 \times 10^{3}$	$1,4 \times 10^{-6}$	$8,0 \times 10^{2}$	$4,6 \times 10^{-7}$	$2,5 \times 10^{2}$	$2,8 \times 10^{-8}$	16
^{105}Rh	$2,9 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{4}$	$3,1 \times 10^{-6}$	$2,6 \times 10^{3}$	10^{-6}	$8,3 \times 10^{2}$	$6,2 \times 10^{-8}$	51
^{129}Te	$3,6 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{3}$	4×10^{-6}	$1,2 \times 10^{2}$	$1,3 \times 10^{-6}$	3,8	$1,9 \times 10^{-7}$	5,9
^{143}Pr	$4,8 \times 10^{-5}$	$3,2 \times 10^{3}$	$5,1 \times 10^{-6}$	$3,4 \times 10^{2}$	$1,6 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{2}$	$2,7 \times 10^{-7}$	18
^{95}Zr + ^{95}Nb	$6,1 \times 10^{-5}$	$1,3 \times 10^{3}$	$6,6 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{2}$	$2,1 \times 10^{-6}$	45	$1,3 \times 10^{-6}$	27
^{241}Am	$7,6 \times 10^{-5}$	0,23	$3,2 \times 10^{-5}$	$9,6 \times 10^{-2}$	10^{-5}	$3,1 \times 10^{-2}$	$2,8 \times 10^{-5}$	$8,4 \times 10^{-2}$
^{239}Pu	$8,3 \times 10^{-5}$	$5,2 \times 10^{-3}$	5×10^{-4}	$3,1 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^{-4}$	$9,8 \times 10^{-3}$	$8,3 \times 10^{-5}$	$3,5 \times 10^{-2}$
^{106}Ru + ^{106}Rh	$1,65 \times 10^{-4}$	$5,7 \times 10^{2}$	$1,7 \times 10^{-5}$	60	$5,5 \times 10^{-6}$	19	$1,5 \times 10^{-6}$	5,1
^{154}Eu	$2,1 \times 10^{-4}$	31	$1,1 \times 10^{-4}$	16	$3,5 \times 10^{-5}$	5,1	$9,5 \times 10^{-5}$	14
^{86}Rb	$3,1 \times 10^{-4}$	$2,4 \times 10^{4}$	$3,25 \times 10^{-5}$	$2,5 \times 10^{3}$	$1,0 \times 10^{-5}$	8×10^{2}	$1,3 \times 10^{-6}$	10^{2}
^{127}Te	$3,1 \times 10^{-4}$	$2,8 \times 10^{3}$	$3,2 \times 10^{-5}$	$2,9 \times 10^{2}$	10^{-5}	92	$2,0 \times 10^{-6}$	18
^{96}Tc	$3,7 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{5}$	$3,7 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{4}$	$1,2 \times 10^{-5}$	$3,8 \times 10^{3}$	$8,0 \times 10^{-7}$	$2,6 \times 10^{2}$
^{147}Pm	$1,4 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{3}$	$1,65 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{2}$	$5,25 \times 10^{-5}$	48	$5,3 \times 10^{-5}$	50
^{151}Sm	$2,5 \times 10^{-3}$	60	$1,2 \times 10^{-2}$	$2,9 \times 10^{2}$	$3,8 \times 10^{-3}$	92	$2,5 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{2}$
^{99}Mo	$5,3 \times 10^{-2}$	$2,4 \times 10^{7}$	$5,7 \times 10^{-3}$	$2,6 \times 10^{6}$	$1,8 \times 10^{-3}$	$8,3 \times 10^{5}$	$1,3 \times 10^{-4}$	$5,9 \times 10^{4}$
^{233}U	$6,3 \times 10^{-2}$	0,57	$1,2 \times 10^{-2}$	0,11	$3,86 \times 10^{-3}$	$3,5 \times 10^{-2}$	$7,4 \times 10^{-3}$	$7,1 \times 10^{-2}$
^{137}Cs + ^{137}Ba	$1,7 \times 10^{-1}$	$1,3 \times 10^{4}$	$1,8 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{3}$	$5,8 \times 10^{-3}$	$4,5 \times 10^{2}$	$1,4 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{2}$
^{238}U	$1,95 \times 10^{3}$	0,65	$2,4 \times 10^{2}$	$6,8 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{2}$	$2,16 \times 10^{-2}$	26	$8,7 \times 10^{-3}$

I. — Radionuclides.
II. — M. P. I. en mg pour une dose de 150 rem en 70 ans.
III. — M. P. I. en µC pour une dose de 150 rem en 70 ans.
IV. — M. P. I. en mg pour une dose de 15,7 rem en un an.
V. — M. P. I. en µC pour une dose de 15,7 rem en un an.
VI. — M. P. I. en mg pour une dose de 5 rem en un an.
VII. — M. P. I. en µC pour une dose de 5 rem en un an.
VIII. — M. P. I. en mg pour une dose de 0,3 rem par semaine.
IX. — M. P. I. en µC pour une dose de 0,3 rem par semaine.

Classement par M. P. I. en milligrammes croissante pour substances dangereuses dans l'industrie nucléaire dans le cas d'une blessure par piqure et substance radioactive insoluble (Cas III)

	I	II	III	V	V	VI	VII	VIII	IX
(1)	^{242}Cm	$1,4 \times 10^{-13}$	$4,7 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-14}$	$4,8 \times 10^{-8}$	$4,6 \times 10^{-15}$	$1,5 \times 10^{-8}$	$4,2 \times 10^{-15}$	$1,4 \times 10$
(2)	^{86}Rb	$2,6 \times 10^{-12}$	$2,0 \times 10^{-4}$	$2,6 \times 10^{-13}$	$2,0 \times 10^{-5}$	$8,3 \times 10^{-14}$	$6,4 \times 10^{-6}$	$2,0 \times 10^{-14}$	$1,6 \times 10$
(3)	$^{140}Ba + {}^{140}La$	$2,9 \times 10^{-12}$	$2,1 \times 10^{-4}$	$2,9 \times 10^{-13}$	$2,1 \times 10^{-5}$	$9,4 \times 10^{-14}$	$6,7 \times 10^{-6}$	$1,8 \times 10^{-14}$	$1,3 \times 10$
(4)	^{89}Sr	$3,6 \times 10^{-12}$	$9,9 \times 10^{-5}$	$3,6 \times 10^{-13}$	10^{-5}	$1,1 \times 10^{-13}$	$3,2 \times 10^{-6}$	$5,7 \times 10^{-14}$	$1,6 \times 10$
(5)	^{91}Y	$3,6 \times 10^{-12}$	$9,1 \times 10^{-5}$	$3,6 \times 10^{-13}$	$9,1 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{-13}$	$2,9 \times 10^{-6}$	$6,4 \times 10^{-14}$	$1,6 \times 10$
(6)	^{129}Te	4×10^{-12}	$1,2 \times 10^{-4}$	4×10^{-13}	$1,2 \times 10^{-5}$	$1,3 \times 10^{-13}$	$3,8 \times 10^{-6}$	$4,6 \times 10^{-14}$	$1,4 \times 10$
(7)	^{140}La	4×10^{-12}	$2,2 \times 10^{-3}$	4×10^{-13}	$2,2 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^{-13}$	7×10^{-5}	$8,5 \times 10^{-15}$	$4,8 \times 10$
(8)	$^{106}Ru + {}^{106}Rh$	$4,9 \times 10^{-12}$	$1,7 \times 10^{-5}$	$5,2 \times 10^{-13}$	$1,8 \times 10^{-6}$	$1,65 \times 10^{-13}$	$5,7 \times 10^{-7}$	$1,9 \times 10^{-13}$	$6,3 \times 10$
(9)	^{105}Rh	6×10^{-12}	$5,0 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^{-13}$	$5,0 \times 10^{-4}$	$1,9 \times 10^{-13}$	$1,6 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{-14}$	10^{-5}
(10)	$^{144}Ce + {}^{144}Pr$	$6,1 \times 10^{-12}$	$1,9 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-13}$	$2,0 \times 10^{-6}$	2×10^{-13}	$6,4 \times 10^{-7}$	$2,2 \times 10^{-13}$	$6,9 \times 10$
(11)	^{143}Pr	$8,1 \times 10^{-12}$	$5,4 \times 10^{-3}$	$8,1 \times 10^{-13}$	$5,4 \times 10^{-5}$	$2,6 \times 10^{-13}$	$1,7 \times 10^{-5}$	$4,9 \times 10^{-14}$	$3,3 \times 10$
(12)	^{131}I	$1,2 \times 10^{-11}$	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-12}$	$1,5 \times 10^{-4}$	$3,9 \times 10^{-13}$	$4,8 \times 10^{-5}$	$5,0 \times 10^{-14}$	$6,3 \times 10$
(13)	^{99}Mo	$1,2 \times 10^{-11}$	$5,6 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-12}$	$5,6 \times 10^{-4}$	$3,9 \times 10^{-13}$	$1,8 \times 10^{-4}$	$3,0 \times 10^{-14}$	$1,4 \times 10$
(14)	$^{95}Zr + {}^{95}Nb$	$1,3 \times 10^{-11}$	$2,7 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^{-12}$	$2,7 \times 10^{-5}$	4×10^{-13}	$8,6 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{-13}$	$4,9 \times 10$
(15)	^{127}Te	$1,4 \times 10^{-11}$	$1,3 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-12}$	$1,3 \times 10^{-5}$	$4,6 \times 10^{-13}$	$4,1 \times 10^{-6}$	$3,5 \times 10^{-13}$	$3,2 \times 10$
(16)	^{96}Tc	$5,9 \times 10^{-11}$	$1,9 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-12}$	$1,9 \times 10^{-3}$	$1,9 \times 10^{-12}$	6×10^{-4}	$1,7 \times 10^{-13}$	$5,5 \times 10$
(17)	$^{90}Sr + {}^{90}Y$	$8,5 \times 10^{-11}$	$1,7 \times 10^{-5}$	$9,5 \times 10^{-12}$	$1,9 \times 10^{-6}$	3×10^{-12}	6×10^{-7}	$4,3 \times 10^{-12}$	$8,5 \times 10$
(18)	^{241}Am	$9,9 \times 10^{-11}$	$3,0 \times 10^{-7}$	$1,1 \times 10^{-11}$	$3,4 \times 10^{-8}$	$3,5 \times 10^{-12}$	$1,1 \times 10^{-8}$	$4,9 \times 10^{-12}$	$1,5 \times 10$
(19)	^{147}Pm	$3,1 \times 10^{-10}$	$2,8 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-11}$	$3,1 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{-11}$	$9,9 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{-11}$	$1,3 \times 10$
(20)	^{154}Eu	$5,6 \times 10^{-10}$	$8,2 \times 10^{-5}$	$6,3 \times 10^{-11}$	$9,2 \times 10^{-6}$	2×10^{-11}	$2,9 \times 10^{-6}$	$2,8 \times 10^{-11}$	$4,1 \times 10$
(21)	$^{137}Cs + {}^{137}Ba$	$1,2 \times 10^{-9}$	$9,5 \times 10^{-5}$	$1,4 \times 10^{-10}$	$1,1 \times 10^{-5}$	$4,6 \times 10^{-11}$	$3,5 \times 10^{-6}$	$5,9 \times 10^{-11}$	$4,7 \times 10$
(22)	^{239}Pu	$5,1 \times 10^{-9}$	$3,2 \times 10^{-7}$	$5,8 \times 10^{-10}$	$3,6 \times 10^{-8}$	$1,85 \times 10^{-11}$	$1,15 \times 10^{-8}$	$2,6 \times 10^{-10}$	$1,6 \times 10$
(23)	^{151}Sm	$3,5 \times 10^{-8}$	$8,4 \times 10^{-4}$	$4,0 \times 10^{-9}$	$9,6 \times 10^{-5}$	$1,3 \times 10^{-11}$	$3,1 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-9}$	$4,3 \times 10$
(24)	^{233}U	$3,7 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{-7}$	$4,2 \times 10^{-9}$	$3,8 \times 10^{-8}$	$1,34 \times 10^{-11}$	$1,2 \times 10^{-8}$	$1,8 \times 10^{-9}$	$1,7 \times 10$
(25)	^{238}U	$5,4 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-7}$	$6,0 \times 10^{-5}$	$2,0 \times 10^{-8}$	$1,9 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-9}$	$2,7 \times 10^{-5}$	$9,1 \times 10$

I. — Radionuclides.
II. — M. P. I. en mg pour une dose de 150 rem en 70 ans.
III. — M. P. I. en μC pour une dose de 150 rem en 70 ans.
IV. — M. P. I. en mg pour une dose de 15,7 rem en un an.
V. — M. P. I. en μC pour une dose de 15,7 rem en un an.
VI. — M. P. I. en mg pour une dose de 5 rem en un an.
VII. — M. P. I. en μC pour une dose de 5 rem en un an.
VIII. — M. P. I. en mg pour une dose de 0,3 rem par semaine.
IX. — M. P. I. en μC pour une dose de 0,3 rem par semaine.

Classement par prise maximum tolérable (M. P. I.) en milligrammes croissante pour substances dangereuses dans l'industrie nucléaire dans le cas de l'inhalation en 8 heures d'une substance radioactive insoluble (poumon organe critique) (Cas IV)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
(1)	^{242}Cm	$1,1 \times 10^{-6}$	3,7	$1,2 \times 10^{-7}$	0,40	$3,8 \times 10^{-8}$	$1,3 \times 10^{-2}$	$3,2 \times 10^{-8}$	0,11
(2)	^{96}Tc	$8,4 \times 10^{-6}$	$2,7 \times 10^{3}$	$8,7 \times 10^{-7}$	$2,8 \times 10^{2}$	$2,7 \times 10^{-7}$	89	$2,5 \times 10^{-8}$	8
(3)	$^{140}Ba + {}^{140}La$	10^{-5}	$7,3 \times 10^{2}$	$1,1 \times 10^{-6}$	77	$3,5 \times 10^{-7}$	24	$6,0 \times 10^{-8}$	4,3
(4)	^{140}La	$1,2 \times 10^{-5}$	$6,7 \times 10^{3}$	$1,3 \times 10^{-6}$	$7,0 \times 10^{2}$	$4,1 \times 10^{-7}$	$2,2 \times 10^{2}$	$2,6 \times 10^{-8}$	15
(5)	^{129}Te	$1,4 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{2}$	$1,5 \times 10^{-6}$	47	$4,8 \times 10^{-7}$	15	$1,8 \times 10^{-7}$	5,3
(6)	^{86}Rb	$1,7 \times 10^{-5}$	$1,3 \times 10^{3}$	$1,8 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{2}$	$5,7 \times 10^{-7}$	45	$1,4 \times 10^{-7}$	11
(7)	$^{95}Zr + {}^{95}Nb$	$1,9 \times 10^{-5}$	$4,0 \times 10^{2}$	2×10^{-6}	43	$6,3 \times 10^{-7}$	14	$3,3 \times 10^{-7}$	7,3
(8)	^{99}Mo	$2,6 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{4}$	$2,6 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{3}$	$8,3 \times 10^{-7}$	$3,8 \times 10^{2}$	$6,0 \times 10^{-8}$	28
(9)	^{89}Sr	$2,9 \times 10^{-5}$	$8,0 \times 10^{2}$	3×10^{-6}	83	$9,6 \times 10^{-7}$	26	$4,7 \times 10^{-7}$	13
(10)	^{91}Y	$2,9 \times 10^{-5}$	$7,3 \times 10^{2}$	$3,1 \times 10^{-6}$	77	$9,9 \times 10^{-7}$	24	$5,0 \times 10^{-7}$	13
(11)	^{105}Rh	3×10^{-5}	$2,5 \times 10^{4}$	$3,1 \times 10^{-6}$	$2,6 \times 10^{3}$	$9,9 \times 10^{-7}$	$8,3 \times 10^{2}$	$6,3 \times 10^{-8}$	53
(12)	$^{106}Ru + {}^{106}Rh$	$3,5 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{2}$	$3,8 \times 10^{-6}$	13	$1,2 \times 10^{-6}$	4,1	$1,4 \times 10^{-6}$	4,7
(13)	^{131}I	4×10^{-5}	$5,0 \times 10^{3}$	$4,2 \times 10^{-6}$	$5,3 \times 10^{2}$	$1,3 \times 10^{-6}$	$1,7 \times 10^{2}$	$1,7 \times 10^{-7}$	22
(14)	$^{144}Ce + {}^{144}Pr$	$4,5 \times 10^{-5}$	$1,4 \times 10^{2}$	$4,8 \times 10^{-6}$	15	$1,5 \times 10^{-6}$	4,8	$1,6 \times 10^{-6}$	57
(15)	^{143}Pr	$6,5 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{3}$	7×10^{-6}	$4,7 \times 10^{2}$	$2,2 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{2}$	$4,0 \times 10^{-7}$	27
(16)	^{127}Te	$9,6 \times 10^{-5}$	$8,7 \times 10^{2}$	$9,9 \times 10^{-6}$	90	$3,2 \times 10^{-6}$	29	$2,4 \times 10^{-6}$	22
(17)	$^{90}Sr + {}^{90}Y$	7×10^{-4}	$1,4 \times 10^{2}$	8×10^{-5}	16	$2,5 \times 10^{-5}$	5,1	$3,3 \times 10^{-5}$	7
(18)	^{241}Am	$7,9 \times 10^{-4}$	2,4	$9,6 \times 10^{-5}$	0,29	3×10^{-5}	$9,2 \times 10^{-2}$	$4,0 \times 10^{-5}$	0,12
(19)	^{154}Eu	$1,2 \times 10^{-3}$	$1,7 \times 10^{2}$	$1,4 \times 10^{-4}$	20	$4,5 \times 10^{-5}$	6,3	$5,7 \times 10^{-5}$	8,3
(20)	^{147}Pm	$2,5 \times 10^{-3}$	$2,3 \times 10^{3}$	$2,9 \times 10^{-4}$	$2,6 \times 10^{2}$	$9,2 \times 10^{-5}$	83	$1,1 \times 10^{-4}$	$1,0 \times 10$
(21)	$^{137}Cs + {}^{137}Ba$	$3,1 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{2}$	$3,8 \times 10^{-4}$	29	$1,2 \times 10^{-4}$	9,2	$1,5 \times 10^{-4}$	12
(22)	^{239}Pu	4×10^{-2}	2,5	$4,8 \times 10^{-3}$	0,30	$1,5 \times 10^{-3}$	$9,6 \times 10^{-2}$	$2,1 \times 10^{-3}$	0,13
(23)	^{151}Sm	$2,8 \times 10^{-1}$	$6,7 \times 10^{3}$	$3,4 \times 10^{-2}$	$8,0 \times 10^{2}$	$1,1 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{2}$	$1,4 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10$
(24)	^{233}U	3×10^{-1}	2,7	$3,5 \times 10^{-2}$	0,32	$1,1 \times 10^{-2}$	10^{-2}	$1,5 \times 10^{-2}$	0,14
(25)	^{238}U	$4,2 \times 10^{3}$	1,4	$5,1 \times 10^{2}$	0,17	$1,6 \times 10^{2}$	$5,4 \times 10^{-2}$	$2,2 \times 10^{2}$	$7,3 \times 10$

I. — Radionuclides.
II. — M. P. I. en mg pour une dose de 150 rem en 70 ans.
III. — M. P. I. en μC pour une dose de 150 rem en 70 ans.
IV. — M. M. P. en mg pour une dose de 15,7 rem en un an.
V. — M. P. I. en μC pour une dose de 15,7 rem en un an.
VI. — M. P. I. en mg pour une dose de 5 rem en un an.
VII. — M. P. I. en μC pour une dose de 5 rem en un an.
VIII. — M. P. I. en mg pour une dose de 0,3 rem par semaine.
IX. — M. P. I. en μC pour une dose de 0,3 rem par semaine.

CLASSEMENT PAR PRISE MAXIMUM TOLÉRABLE (M. P. I.) EN MILLIGRAMMES CROISSANTE POUR SUBSTANCES DANGEREUSES DANS L'INDUSTRIE NUCLÉAIRE DANS LE CAS DE L'INHALATION D'UNE SUBSTANCE RADIOACTIVE INSOLUBLE (TRACTUS GASTRO-INTESTINAL ORGANE CRITIQUE) ET CORRESPONDANT A UNE DOSE DE 0,3 REM PAR SEMAINE (CAS V).

	I	II	III	IV
(1)	^{140}La	$1,2 \times 10^{-8}$	6,6	Gros intestin inférieur
(2)	^{242}Cm	$1,8 \times 10^{-8}$	$6,0 \times 10^{-2}$	»
(3)	^{105}Rh	$2,6 \times 10^{-8}$	22	»
(4)	^{96}Tc	$7,2 \times 10^{-8}$	24	»
(5)	^{140}Ba + ^{140}La	$9,5 \times 10^{-8}$	7	»
(6)	^{99}Mo	$1,6 \times 10^{-7}$	72	»
(7)	^{129}Te	$2,0 \times 10^{-7}$	6,1	»
(8)	^{143}Pr	$2,0 \times 10^{-7}$	13	»
(9)	^{91}Y	$2,6 \times 10^{-7}$	6,6	»
(10)	^{89}Sr	$6,1 \times 10^{-7}$	17	»
(11)	^{95}Zr + ^{95}Nb	$7,5 \times 10^{-7}$	16	»
(12)	^{106}Ru + ^{106}Rh	$7,9 \times 10^{-7}$	2,7	»
(13)	^{144}Ce + ^{144}Pr	$9,2 \times 10^{-7}$	2,9	»
(14)	^{86}Rb	$1,7 \times 10^{-6}$	$1,3 \times 10^{2}$	»
(15)	^{127}Te	$2,0 \times 10^{-6}$	18	»
(16)	^{131}I	$2,3 \times 10^{-6}$	$2,9 \times 10^{2}$	Intestin grêle
(17)	^{241}Am	$2,2 \times 10^{-5}$	$6,7 \times 10^{-2}$	Gros intestin inférieur
(18)	^{147}Pm	$5,9 \times 10^{-5}$	56	»
(19)	^{154}Eu	$7,5 \times 10^{-5}$	11	»
(20)	^{90}Sr + ^{90}Y	$1,0 \times 10^{-4}$	21	»
(21)	^{239}Pu	$1,1 \times 10^{-3}$	$7,1 \times 10^{-2}$	»
(22)	^{137}Cs + ^{137}Ba	$2,7 \times 10^{-3}$	$2,2 \times 10^{2}$	Intestin grêle
(23)	^{233}U	$7,9 \times 10^{-3}$	$7,5 \times 10^{-2}$	Gros intestin inférieur
(24)	^{151}Sm	$8,0 \times 10^{-3}$	$1,9 \times 10^{2}$	»
(25)	^{238}U	$7,7 \times 10^{3}$	0,10	»

I. — Radionuclides.
II. — M. P. I. en mg qui délivrera une dose de 0,3 rem dans la semaine qui suit.
III. — M. P. I. en µC qui délivrera une dose de 0,3 rem dans la semaine qui suit.
IV. — Portion du tractus gastro-intestinal correspondant à la plus petite M. P. I.
V. — (Cas V). Observation particulière. — Le séjour de la matière contaminée dans le tractus gastro-intestinal étant de 31 heures (1 h dans l'estomac, 4 h dans l'intestin grêle, 8 h dans le gros intestin supérieur, 18 h dans le gros intestin inférieur) et la substance étant insoluble, les M. P. I. correspondant aux dose de 15,7 rem par an ou en 5 rem par an ou 150 rem en 70 ans présentent aucun intérêt et nous n'avons eu qu'à nous conformer aux résultats du Dr K. Z. Morgan.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MORGAN (K. Z.), Maximum permissible Internal Dose of Radionuclides : Recent Changes in Values-Nuclear Science and Engineering, vol. 1, n° 6, December, 1956. (K. Z. Morgan est Président du Comité de Dose Interne de la Commission Internationale de Protection Radiologique.)

[2] MORGAN (K. Z.), SNYDER (W. S.) et FORD (M. R.), Conférence de Genève A/Con. 8/79. Voir publication finale rectifiée : « Internation al Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy », published by United Nations, New York, 1956.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 12
TOME 18, DÉCEMBRE 1957, PAGE 158 A.

SIMULATEUR ÉLECTRONIQUE POUR L'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES RADIOACTIFS

Par Monique GUTMANN et Robert COMTE.
École Supérieure de Physique et de Chimie.

Introduction. — Considérons une famille radioactive :

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots A_n$$

dans laquelle chacun des corps peut provenir de trois origines différentes : à l'instant initial, il existe des atomes du corps A_n ; au cours de la désintégration, le corps A_{n-1} produit des atomes A_n ; un phénomène annexe (fission, par exemple) peut produire un nombre constant d'atomes par seconde.

Le calcul de l'évolution au cours du temps d'une telle chaîne est long et fastidieux.

Nous nous proposons de simuler l'évolution en fonction du temps de chacun des corps de la chaîne grâce à un montage électronique. Nous pourrons alors étudier les variations au cours du temps : du nombre d'atomes de chaque corps ; de la somme totale ou partielle des rayonnements émis par les corps de la chaîne. Réciproquement, ayant obtenu une courbe de décroissance radioactive dont un des paramètres est inconnu, il est possible, grâce à des abaques tracés à l'aide du simulateur, de déterminer la valeur de ce paramètre.

Nous limiterons notre étude aux corps dont les périodes diffèrent au plus d'un rapport 100. Dans les autres cas, il est possible de considérer que l'un des corps se désintègre instantanément par rapport à l'autre. Nous montrerons qu'il est possible de comprimer l'échelle des temps : les périodes des différents corps étant divisées dans un rapport q, le phénomène s'écoulant en un intervalle de temps donné sera représenté en un intervalle de temps q fois plus petit. La constante de temps maxima adoptée sera de l'ordre de 1/50e de seconde. Le phénomène sera simulé de façon périodique (enregistrement à l'oscillographe cathodique). Nous disposons d'un générateur d'impulsions. Ces impulsions seront envoyées en différents points du montage.

Définitions. — Dans tout ce qui suit, nous considérerons la famille radioactive

$$\text{(A)} : \quad \begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & & a_n & \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\ A_1 & \to & A_2 & \to & \ldots & A_n & \to \ldots \\ \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\ A_{10} & & A_{20} & & & A_{n0} & \end{array}$$

A_n représente le nombre d'atomes du corps n existant à l'instant t ; A_{n0} le nombres d'atomes à l'instant origine du corps n ; a_n le nombre d'atomes du corps n produit chaque seconde par un phénomène annexe.

L'équation fondamentale décrivant l'évolution du corps n est donc :

$$\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}t} + \lambda_n A_n = \lambda_{n-1} A_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

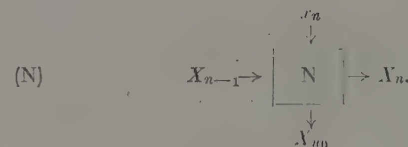
λ_n et λ_{n-1} étant des caractéristiques relatives aux corps n et $n-1$ de la famille (λ_n est reliée à la période T_n par l'expression suivante : $\lambda_n = \dfrac{0{,}693}{T_n}$).

L'évolution du corps n ne dépend que des trois grandeurs : a_n ; $\lambda_{n-1} A_{n-1}$; A_{n0}.

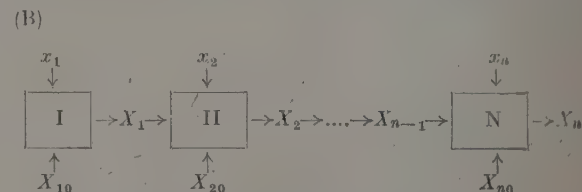
Nous allons donc représenter les A et a par des grandeurs électriques convenablement choisies X et x que nous préciserons plus loin.

Le phénomène de désintégration proprement dit est représenté par des circuits (I), (II), ... construits de sorte que leur équation de fonctionnement soit analogue à l'équation (1).

Dans le circuit (N), nous introduisons donc les grandeurs X_{n-1}, x_n et X_{n0}. Nous obtenons à la sortie de ce circuit X_n. Schématiquement, nous pouvons représenter l'étage (N) de la manière suivante :



Le chaîne du simulateur (B), analogue à la famille radioactive, aura donc l'aspect suivant :



Le circuit (B) simule ainsi la chaîne radioactive (A). Notons bien que les flèches signifient ici, non pas une transformation mais l'application d'une grandeur X ou x sur le circuit.

Ce schéma nous montre donc que notre étude va se composer de cinq parties :

I. Étude mathématique des circuits analogiques.
II. Jonction entre les circuits : application au circuit (N) de la grandeur X_n, sans perturber le circuit (N — I).
III. Introduction de la grandeur X_{n0}.
IV. Introduction de la grandeur x_n.
V. Sommation des rayonnements.

I. Étude mathématique des circuits analogiques. — 1.1. ÉCHELLE DES TEMPS. — Voyons d'abord s'il est possible de « comprimer » l'échelle des temps afin de représenter un phénomène durant mille ans par exemple en un temps q fois plus court.

Posons :

$$t' = \frac{t}{q} \qquad dt' = \frac{dt}{q}.$$

L'équation (1) s'écrit :

$$\frac{1}{q}\frac{dA_n}{dt'} + \lambda_n A_n = \lambda_{n-1} A_{n-1} + a_n.$$

Posons :

$$\lambda'_n = q\lambda_n \qquad \lambda'_{n-1} = q\lambda_{n-1}$$
$$a'_n = q\, a_n.$$
$$\frac{dA_n}{dt'} + \lambda'_n A_n = \lambda'_{n-1} A_{n-1} + a'_n. \qquad (2)$$

Le phénomène qui se déroule en un certain intervalle de temps peut donc être simulé en un intervalle de temps q fois plus petit, à condition de prendre :

$$\lambda'_n = q\,\lambda_n$$
$$a'_n = q\,a_n.$$

Il est évident que cette contraction doit être faite pour tous les corps de la famille, dans le même rapport q.

1.2. CONSTANTE DE TEMPS MAXIMA (CHOIX DE q). — Nous voulons que le phénomène soit complètement effectué en 1/10e de seconde environ (enregistrement à l'oscillographe cathodique). Cherchons un ordre de grandeur des valeurs minima de λ à adopter (c'est-à-dire une valeur de T maxima). Pour simplifier le calcul, examinons le cas suivant :

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \ldots \lambda'_n.$$

En résolvant l'équation (2), tous calculs faits, nous sommes conduits à l'expression suivante :

$$A_n = A_{10}\frac{(\lambda' t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda' t}.$$

Pour $t = 1/10^e$ de seconde, nous voulons :

$$\frac{A_n}{A_{10}} = 10^{-3}.$$

Prenons $n = 6$ (soit 6 étages) ; il vient : $\lambda' t = 16$ d'où λ' minimum 150 s^{-1}. Pour calculer la valeur minima de λ', nous nous sommes placés dans le cas le plus défavorable où toutes les constantes de temps seraient longues. Nous avons donc pratiquement adopté λ' minimum de l'ordre de 50 s^{-1} soit une constante de temps de 1/50e de seconde.

1.3. CHOIX DU CIRCUIT ANALOGIQUE. — L'équation différentielle à simuler étant du premier ordre, le circuit sera simple et comprendra, soit une résistance et une capacité, soit une résistance et une self.

Nous avons choisi le circuit du premier type. Pour obtenir $RC = 1/50$ s il faut par exemple $R = 1\,M\Omega$ et $C = 1/50\,\mu F$. Ces valeurs sont tout à fait courantes. Considérons le circuit suivant : figure 1 :

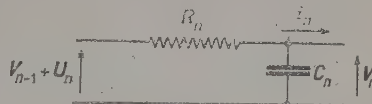


FIG. 1.

On peut écrire :

$$R_n i_n + \frac{1}{C_n}\int i_n\, dt' = V_{n-1} + U_n$$
$$Q_n = \int i_n\, dt' = C_n V_n$$

donc :

$$R_n C_n \frac{dV_n}{dt'} + V_n = V_{n-1} + U_n \qquad (3)$$

à identifier avec l'équation (2) :

$$\frac{dA_n}{dt'} + \lambda'_n A_n = \lambda'_{n-1} A_{n-1} + a'_n.$$

Posons : $\quad V_n = \alpha_n A_n$
$\qquad\qquad U_n = \beta_n a'_n$

et déterminons $\alpha_n\ \beta_n\ R_n\ C_n$ l'équation (3) s'écrit :

$$R_n C_n \alpha_n \frac{dA_n}{dt'} + \alpha_n A_n = \alpha_{n-1} A_{n-1} + \beta_n a'_n$$

l'analogie conduit à :

$$\frac{\alpha_n R_n C_n}{1} = \frac{\alpha_n}{\lambda'_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{\lambda'_{n-1}} = \beta_n$$

et d'autres équations de même forme, mais écrites avec les indices $(n-2)$ et $(n-1)$ ... pour les autres circuits ; donc :

$$\frac{\alpha_n}{\lambda'_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{\lambda'_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-2}}{\lambda'_{n-2}} = \beta_n = \beta_{n-1} = \ldots \beta$$

d'où enfin :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda'_n &= 1/R_n C_n \\ V_n &= \beta\lambda'_n A_n \\ U_n &= \beta a'_n \end{aligned}} \qquad (4)$$

II. Jonctions entre les circuits. — Nous venons de voir comment il était possible d'obtenir V_n à partir des variables V_{n-1} et U_n.

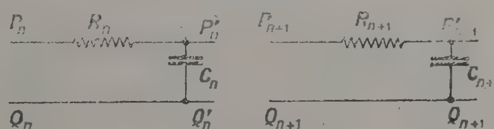


FIG. 2.

Pour obtenir V_{n+1}, il sera nécessaire d'appliquer V_n, aux bornes du circuit (N + 1). (Nous ne nous occuperons point des tensions U_n jusqu'au paragraphe IV.)

Or l'on voit qu'il est impossible de lier les points P_{n+1} et Q_{n+1} directement à P'_n et Q'_n; le circuit (N) ne fonctionnerait plus comme nous le désirions au paragraphe précédent.

Il serait évidemment possible d'utiliser un circuit qui ait une impédance 100 ou 1 000 fois plus grande que celle du circuit (N). Ce procédé est inapplicable pratiquement si l'on veut construire une chaîne de 4 ou 5 étages les uns à la suite des autres.

Pour appliquer à l'étage (N + 1) la tension V_n sur grande impédance sans amplification, il suffit d'utiliser une triode montée en cathodyne. Le calcul montre et l'expérience prouve qu'avec une ECC 40 ou une ECC 82 ayant une résistance de cathode de 12 500 ohms, une variation de tension appliquée à la grille se retrouve diminuée de 3 ou 4 % de la cathode.

Nous avons préféré l'ECC 40 à l'ECC 82 pour la raison suivante : le point de fonctionnement (pour une résistance de cathode de 10 000 ohms environ) correspond à une différence de potentiel grille-cathode de — 18 volts pour l'ECC 82 et de — 8 volts pour l'ECC 40, d'où limitation plus importante du nombre des étages, par suite de l'isolement cathode-filament prévu pour 100 volts dans le cas de l'ECC 82, et pour 175 volts dans le cas de l'ECC 40.

Choix des valeurs R_n et C_n : Nous avons adopté $R_n = 1{,}5\ \mathrm{M\Omega}$, $100\ \mathrm{pF} < C_n < 10\,000\ \mathrm{pF}$, ce qui correspond à : $70 < \lambda'_n < 7\,000$, constante de temps maxima : 1/70e de seconde (*fig.* 3). Dans ce

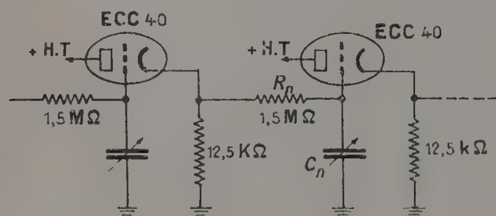


FIG. 3.

qui suit, nous négligerons toujours la résistance de 12 500 ohms devant R_n.

Afin de compenser le coefficient de transmission inférieur à 1 du montage cathodyne, nous avons monté en parallèle sur la résistance de cathode un potentiomètre de correction P^c (voir plan général I du montage, p. 162). Les équations (4) ($V_n = \lambda'_n A_n$) montrent que la variation de potentiel au point réglable du potentiomètre P^c représente une quantité proportionnelle au rayonnement du corps n. Nous désirons obtenir également la représentation de l'évolution du nombre des atomes du corps n. Il faut donc diviser V_n par λ'_n, ou le multiplier par $0{,}693/T'$. Afin de simuler cette évolution, le point variable de P^c est lié à la grille d'une ECC 40 dont la résistance de cathode est constituée par un potentiomètre P^T de 10 000 ohms.

Les différents potentiomètres P^c ayant été ajustés, la variation de potentiel au point L''_n représente le rayonnement dû au corps n, et celle au point L'_n le nombre d'atomes, si P^T a été réglé à la valeur correspondant à T', période du corps n.

III. **Introduction de la grandeur X_{n0} (quantité initiale).** — Pour représenter la quantité initiale A_{n0} d'atomes du corps n, il suffit de charger les capacités proportionnemment à A_{n0} de sorte que l'on ait :

$$V_{n0} = \beta \lambda'_n A_{n0}.$$

Pour charger la capacité, nous utilisons des impulsions envoyées à travers des diodes à la fréquence de 10 par seconde (d'où représentation périodique du phénomène).

En dehors des impulsions, les diodes ont une très grande résistance et n'interviennent pas. Toutefois pendant la durée de l'impulsion, qui est très courte (quelques microsecondes), il est nécessaire de faire circuler un courant moyen assez intense pour que la charge qui est : $Q_n = \int_0^t i\,dt = i_m t$ soit assez grande.

Nous avons donc adopté le dispositif suivant, figure 4 :

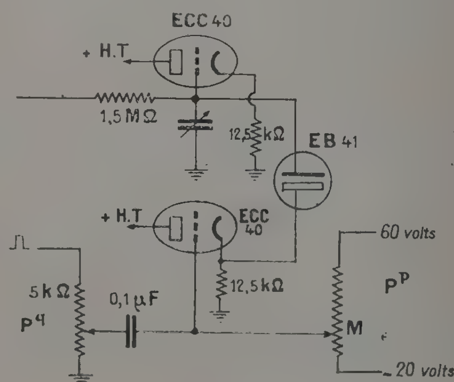


FIG. 4.

L'amplitude de l'impulsion venant d'un générateur est réglable à l'aide d'un potentiomètre P^q, puis envoyée par l'intermédiaire d'une capacité, vers la grille d'une ECC 40, montée en cathodyne, dont la cathode est reliée à la plaque de la diode. La polarisation de la grille, variable entre — 20 et 60 volts, est obtenue à l'aide d'un potentiomètre P^p ajusté de sorte que la différence de potentiel minima entre les électrodes de la diode soit de quelques volts au moins. Notons que le potentiomètre P^p agit sur le niveau de l'impulsion.

IV. Introduction de la grandeur x_n (production constante de l'un des éléments de la chaîne). — Nous avons vu qu'il suffisait d'appliquer à partir de l'instant initial une tension $U_n = \beta_n a'_n$ (voir paragraphe 1.3). Nous n'avons pas pu faire un montage simple qui donne satisfaction. Au lieu d'appliquer une tension constante aux bornes du circuit RC, nous envoyons une intensité constante à travers la capacité. Montrons qu'il y a équivalence :

a) Posons $V_{n-1} = 0$ et appliquons U_n à l'entrée du circuit (voir *fig.* 5).

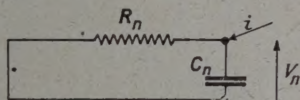


FIG. 5.

Nous avons d'après l'équation (3) :

$$U_n = V_n + R_n C_n \frac{dV_n}{dt}$$

$$U_n = V_n + R_n C_n p V_n.$$

b) Envoyons à travers C_n l'intensité i en fermant le circuit par une résistance négligeable devant R_n (voir *fig.* 6).

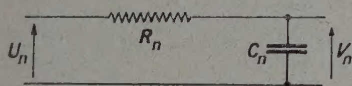


FIG. 6.

$$V_n = \frac{R_n}{R_n + \frac{1}{C_n p}} \times \frac{i}{C_n p}$$

$$V_n + R_n C_n p V_n = R_n i.$$

Il y a identité si

$$i = \frac{U_n}{R_n}.$$

Pour simuler l'équation (2), il suffit donc d'appliquer sur le circuit les courants et tensions marqués sur le schéma ci-dessous (voir *fig.* 7) :

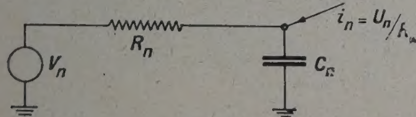


FIG. 7.

Au début du phénomène, nous appliquons brusquement le courant i_n puis, à la fin, nous interrompons ce courant jusqu'à ce que le système revienne à son état d'équilibre ; alors, à nouveau nous envoyons i_n. Le courant i_n est obtenu, pour chacun des étages, à l'aide d'une pentode dont la plaque est liée à la capacité C_n (voir plan général I). Ces pentodes sont commandées par leurs grilles sur lesquelles nous envoyons un signal carré provenant d'un basculeur actionné par les impulsions elles-mêmes. Les potentiomètres P^a permettent de faire varier l'amplitude de ce signal carré.

Il est nécessaire d'employer une série de diviseurs de tension, ainsi qu'une lampe montée en cathodyne comme adaptatrice d'impédance (voir le schéma). Comme les courants à débiter sont très faibles (50 μA maximum), nous portons l'écran de chaque pentode à un potentiel faible de 30 volts environ. Il est possible à l'aide d'interrupteur K^a de n'appliquer un courant que sur certains étages.

V. Sommation des rayonnements. — Les différences de potentiel des étages successifs qui, rappelons-le représentent des rayonnements, sont divisées et appliquées respectivement aux grilles de pentodes, dont les plaques sont réunies entre elles. La tension aux bornes de la résistance de charge commune de ces plaques est envoyée dans un étage cathodyne par l'intermédiaire d'une liaison à grande constante de temps par rapport à $R_n C_n$.

Nous obtenons donc la somme des rayonnements, somme totale ou partielle suivant la position des interrupteurs K (voir plan général I du montage).

Conclusion. — Afin de vérifier le fonctionnement du simulateur, nous avons procédé à une étude expérimentale, en comparant les résultats du calcul d'une chaîne radioactive avec les courbes obtenues par le simulateur. L'appareil permet d'obtenir une précision de 2 % si l'étalonnage est soigneusement fait.

Il est possible d'adapter facilement cet appareil à de grandes constantes de temps : ceci nécessite de remplacer la capacité de liaison de la totalisation des rayonnements par un montage « continu » et d'augmenter les valeurs des capacités C_n. Les courbes seraient alors enregistrables avec un voltmètre enregistreur classique.

L'appareil s'adapte aux calculs de familles radioactives naturelles et artificielles (application à des calculs de réacteurs, empoisonnement des piles).

Exemple d'application à un calcul simple de réacteur

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots$$

Le corps A_2 provient :

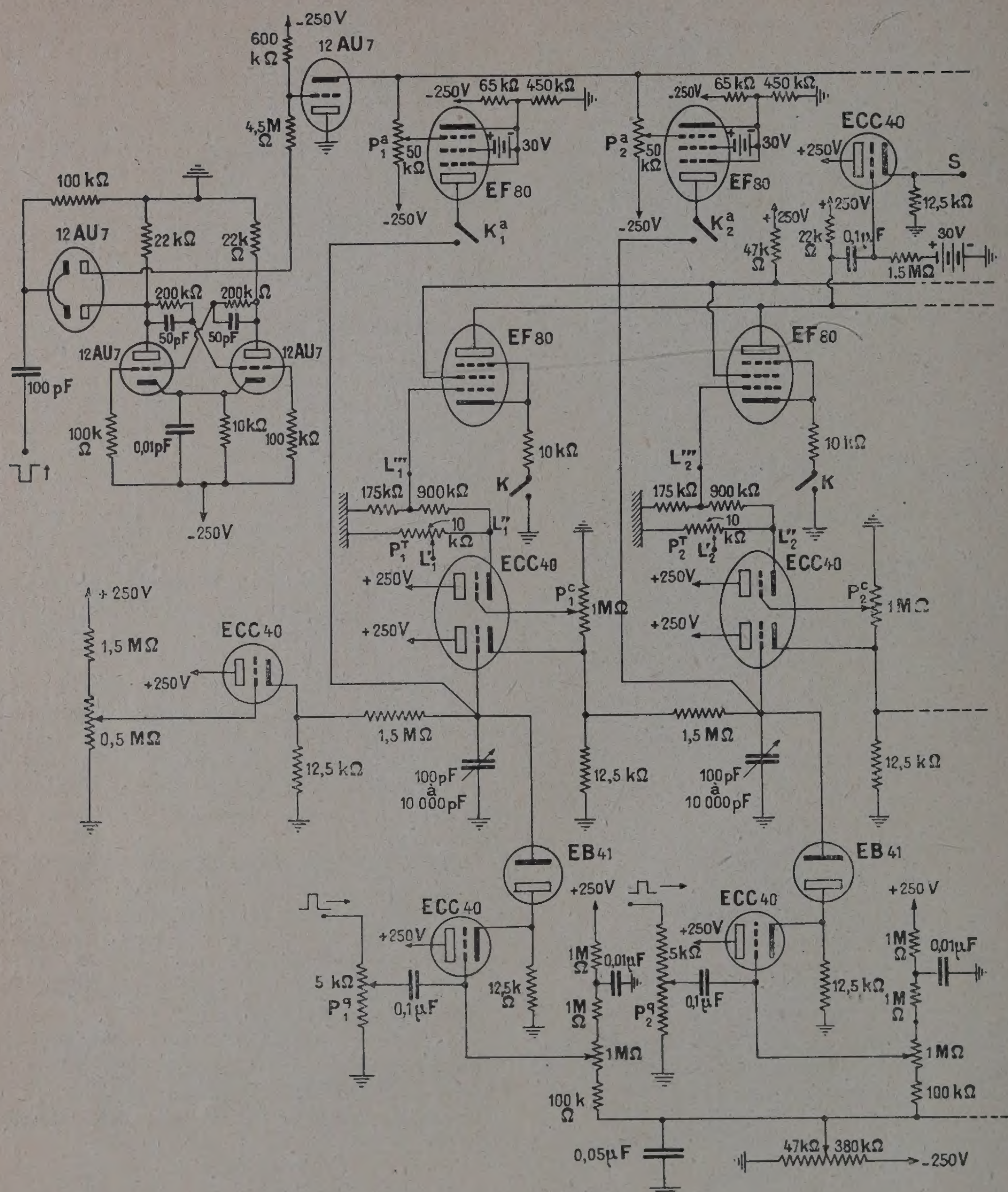
— de A_1, qui est radioactif ;

— de ^{235}U qui se désintègre en donnant des atomes plus légers et notamment des atomes A_2. Le nombre a_2 d'atomes produit par seconde est proportionnel au flux de neutrons Φ.

$$a_2 = K_2 \Phi$$

par contre a'_2 atomes de A_2 sont détruits par les neutrons car A_2 a une section efficace non négligeable on a :

$$a'_2 = K_2^{\bullet} \sigma_2 A_2 \Phi.$$



Plan général I.

L'évolution de A_2 est donc représentée par l'équation :

$$\frac{dA_2}{dt} = \lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 + K_2 \Phi - K'_2 \sigma_2 A_2 \Phi$$

qui s'écrit sous la même forme que l'équation (1) :

$$\frac{dA_2}{dt} + (\lambda_2 + K_2 \sigma_2 \Phi) A_2 = \lambda_1 A_1 + K_2 \Phi.$$

Si Φ est constant, cette équation est résoluble avec l'appareil décrit.

Ce sujet d'étude a été proposé par M. Labeyrie que nous remercions vivement. Le travail a été effectué dans le laboratoire de M. Tournier à l'École de Physique et Chimie. Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à M. Blanc et M. Fournet pour leurs précieux conseils.

Manuscrit reçu le 26 novembre 1957.

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Structure topologique de l'équation de M. Liénard, par N. MINORSKY, Domaine de l'Arc, Aix-en Provence (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 121 A). — Dans ce mémoire on étudie les solutions stationnaires de l'équation différentielle de M. Liénard dans l'espace de ses paramètres ; on obtient ce résultat en utilisant la transformation stroboscopique. On montre ainsi que chaque octant de cet espace jouit d'une certaine configuration topologique définie par la stabilité de l'état de repos ainsi que par l'existence de l'état stationnaire stable. Les configurations topologiques diverses étant ainsi déterminées dans les différentes régions de l'espace, on obtient aussi des conclusions concernant la nature de bifurcations quand le point paramétrique traverse ces régions. On constate ainsi que ces bifurcations sont de trois genres, à savoir : (1) la stabilité de l'état de repos change sans que le reste de la configuration varie ; (2) quand les deux cycles limites voisins se confondent à la limite pour disparaître ensuite et finalement ; (3) quand un cycle extérieur est ajouté ou bien soustrait à la configuration initiale.

Cette étude faite grâce à l'emploi du système stroboscopique est interprétée ensuite pour l'équation de Liénard sous la forme habituelle. Compte tenu de signes de coefficients, on obtient ainsi 8 formes diverses de cette équation avec les 3 formes supplémentaires qui correspondent aux plans de coordonnées de cet espace qui sont analysées par ce procédé.

On montre aussi que l'équation de Rayleigh et quelques formes spéciales de l'équation de Van der Pol sont susceptibles d'être analysées aussi par la même méthode.

Finalement on montre que le caractère topologique des solutions dans les différentes régions de l'espace paramétrique peut être lié facilement à la notion physique de l'amortissement variable sans qu'on puisse toutefois déterminer l'état stationnaire comme cela résulte de l'emploi de la méthode exposée dans ce mémoire.

Dispositif simple pour la mesure de l'émission des poudres luminescentes excitables en ultra-violet, par Maurice LEGRAND, André LACAM et Marc GROSJEAN, Services de Recherches Uclaf (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 131 A). — Le dispositif simple qui est décrit permet de mesurer en valeur relative la répartition énergétique spectrale, entre 2 000 et 8 000 Å, de la lumière émise par les phosphores excitables par le rayonnement ultra-violet ou visible. Il permet accessoirement de tracer les courbes de réflexion diffuse dans le même domaine de longueur d'onde. L'adaptation sur les spectrophotomètres Beckman D. U. est rapide et ne nécessite pas de réglages optiques.

La modulation des courants continus par interrupteur à transistors, par J. L. LEROY, C. MABBOUX, Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences de Caen (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 135A). — Un interrupteur à deux transistors permet de moduler, en vue de leur amplification, des signaux continus ou lentement variables supérieurs à quelques microvolts sous une impédance de 30 ohms ; la porteuse est fournie par un multivibrateur à transistors alimenté par une pile de 4,5 volts.

Projet et étude expérimentale de stabilisateurs alternatifs à impédance variable, par F. PERRIER et J. M. CODINA, Laboratoire d'Optique Électronique du C. N. R. S., Toulouse (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 137A). — Les auteurs montrent comment conduire le projet de stabilisateurs alternatifs d'après les conditions imposées. De nombreux enregistrements sont donnés pour préciser les possibilités de ce type d'appareils.

Chauffage par induction H. F. Existence d'un courant induit ondulé en rapport avec l'effet de « zébrage », par Louis ABEL, Laboratoire Régie Renault (Billancourt) (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 144 A). — Certains auteurs (Babat, Néel, J. Pomey) ont constaté une répartition de température, non pas uniforme, mais en bandes circulaires à peu près régulières, lorsque l'on chauffe un cylindre d'acier dans un inducteur concentrique à environ 10^5 Hz ou plus.

Le pas des bandes varie très sensiblement comme $\sqrt{\rho / f}$; elles ne se constatent que sur des corps ferromagnétiques et ayant des points de transition en perméabilité, et cela dans certaines conditions (chauffage très rapide).

Nous donnons ici :

— une théorie mathématique complète du mécanisme de déclenchement du phénomène ;

— une indication sommaire sur sa stabilisation par auto-amplification, ce qui conduit à prévoir en effet un pas variant comme il a été dit plus haut.

Par la même occasion, nous indiquons un procédé de calcul sur machine de l'induction dans un cylindre hétérogène.

Les prises maximum tolérables (M. P. I.) en milligrammes et en microcuries pour les radionuclides dangereux dans l'industrie nucléaire et pour une exposition unique, par Pierre-Octave ROBERT, Professeur Agrégé de Physique (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 154 A). — Tableaux de classement des radionuclides dangereux dans l'industrie nucléaire par prises maximum tolérables croissantes en milligrammes, avec correspondance entre les M. P. I. en milligrammes et les M. P. I. en microcuries, ces M. P. I. correspondant aux taux de dose de 150 rem en 70 ans, 15,7 rem par an, 5 rem par an et 0,3 rem par semaine.

Leur intérêt est d'établir une corrélation entre la détection, liée à une évaluation en microcuries, et l'absorption par l'organisme et l'arrêt par filtrage basés sur un effet de masse ou de volume.

Simulateur électronique pour l'étude des phénomènes radioactifs, par Monique GUTMANN et Robert COMTE, École Supérieure de Physique et de Chimie (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 158 A). — L'appareil est destiné à simuler l'évolution en fonction du temps du nombre d'atomes et de l'intensité du rayonnement de chacun des corps d'une chaîne radioactive. Nous nous sommes limités aux cas où les périodes des corps diffèrent au plus d'un rapport 100.

Les phénomènes sont enregistrés à l'aide d'un oscillographe cathodique. L'appareil s'adapte aux calculs de familles radioactives naturelles et artificielles : application à des calculs d'empoisonnement de réacteur.

ABSTRACTS OF THE PAPERS

Alternating current stabilizers based on impedance variation : design and test, by F. Perrier and J. M. Codina, Laboratoire d'Optique Électronique du C. N. R. S., Toulouse (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 137 A).— The authors show how to design alternating current stabilizers which meet certain requirements. Numerous records are given hat show precisely determine the performance of this type of apparatus.

« Zebra Stripes » phenomenon by high Frequency Heating of a steel cylinder, by Louis Abel, Labaratoire Régie Renault (Billancourt) (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 144 A).— Some authors (Babat, Néel, J. Pomey) have stated that the heat distribution on the surface of a steel cylinder, when heated by induction at $> 10^5$ Hz, was not uniform, but consisted of parallel circular stripes, almost regularly set.

The step λ of these stripes varies very closely as $\sqrt{\rho / f}$. They are to be seen only on the surface of ferromagnetic metals such as mild steel, e.g., and with very fast heating.

We give in this paper :

— a complete mathematical theory of the beginning of this phenomenon ;

— a brief information on its stabilisation by self-amplification ;

— a method of calculating, with a machine, the inductive current in a heterogeneous cylinder.

We are able to establish the validity of $\lambda \sim \sqrt{\rho / f}$.

Maximum permissible intake (M. P. I.) in milligrams and in microcuries for dangerous radionuclides in Nuclear Industry and for single exposure, by Pierre-Octave Robert, Professeur Agrégé de Physique (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 154 A).— Classification tables of the dangerous radionuclides in Nuclear Industry by increasing maximum permissible intake in milligrams, with correspondance between M. P. I. in milligrams and M. P. I. in microcuries, the M. P. I. corresponding to dose rate of 150 rem in 70 years, 15,7 rem in 1 year, 5 rem in 1 year, and 0,3 rem in 1 week.

Their purpose is to establish a correlation between the detection, whose estimate is in microcuries, and absorption by body organs and the stopping by filtering based on mass and volume effect.

Electronic simulator for radioactive phenomena study, by Monique Gutmann and Robert Comte, École Supérieure de Physique et de Chimie, (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 158 A). – Our apparatus is planned in order to simulate the evolution with time of a number of atoms and radiation intensity of each member of a radioactive family. We consider only the case when the periods of the substances are different in the ratio of 100 at the most.

Phenomena are registered with a cathode oscillograph. Our apparatus is suited to natural and artificial radioactive families and to nuclear reactor poisoning.

Topological structure of Lienard's equation, by N. Minorsky, Domaine de l'Arc, Aix-en-Provence (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 121 A). — This paper investigates stationary solutions of Liénard's equation in its parameter space by means of the stroboscopic transformation. It is shown that each octant of this space is characterized by a certain topological configuration determined by the stability of the state of rest and by the existence of a stable stationary state.

Given the various topological configurations so determined, one obtains also conclusions regarding the nature of bifurcations when the parametric point traverses different regions. One ascertains that these bifurcations are of three different kinds :

(1) stability of the state of rest changes while the rest of the configuration remains unchanged ;

(2) two neighboring limit cycles coalesce at the limit and disappear thereafter ;

(3) an external cycle either is added or subtracted from the initial configuration.

Owing to the rise of the stroboscopic transformation one obtains 8 different forms of Liénards equation with 3 additional forms representing special cases.

It is shown that Rayleigh's equation as well as some special forms of Van der Pol's equation can be also investigated by this method.

It is also shown that the topological character of solutions can be investigated qualitatively by means of the physical concept of the variable damping but in such a case it is impossible to determine the stationary amplitude as in the case when the use is made of the stroboscopic method.

Simple apparatus for the measurement of the emission of luminescent powders, excitable by U. V., by M. Legrand A. Lacam et M. Grosjean, Services de Recherches Uclaf (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 131 A). — The described simple apparatus allows relative measurement of the spectral energy distribution, between 2 000 and 8 000 Å, of the light emitted by phosphors, excitable by U. V. or visible radiations. It allows also to draw the diffuse reflexion curves for the same wavelength region. The adaptation of the apparatus on the Beckman D. U. spectrophotometers is very easy and does not necessitate optical adjustment.

On the modulation of direct currents by transistors switch, by J. L. Leroy, C. Mabboux, Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences de Caen (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 135 A). — A two transistors switch can modulate, before their amplification, direct or slowly variable signals down to a few microvolts at the impedance of 30 ohms ; the carrier is given by a transistor multivibrator supplied with à 4,5 volts battery.

Le Gérant : Maurice Blondin. — Dépôt légal : 4e trim. 1957. — Imp. Taffin-Lefort, à Lille (France).